

# X. Polynômes

## 1 Polynômes à une indéterminée

**Définition 1.** On appelle **polynôme d'indéterminée**  $X$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  une expression de la forme  $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n = \sum_{k=0}^n a_kX^k$  où  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  sont des nombres réels ou complexes appelés **coefficients** du polynôme  $P(X)$ .

On note  $\mathbb{R}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

On note  $\mathbb{C}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients complexes.

**Exercice 1.** Montrer que  $P(X) = 2X^2 - X + 1$  et  $Q(X) = X^5 - 1$  sont des polynômes et déterminer leurs coefficients.

**Remarque 1.** Le polynôme  $2X^2 - X + 1$  et la fonction polynomiale  $f : x \mapsto 2x^2 - x + 1$  sont des objets mathématiques distincts, nous montrerons cependant que l'on peut identifier un polynôme avec sa fonction polynomiale associée.

**Définition 2.** On appelle :

- **polynôme nul** le polynôme  $P(X) = 0$ ,
- **polynôme unité** le polynôme  $P(X) = 1$ ,
- **polynôme constant** un polynôme de la forme  $P(X) = a_0$  avec  $a_0$  un nombre réel ou complexe,
- **monôme** un polynôme de la forme  $P(X) = a_kX^k$  avec  $a_k$  un nombre réel ou complexe.

**Définition 3.** On appelle **degré** d'un polynôme non nul  $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n = \sum_{k=0}^n a_kX^k$  et on note  $\deg(P)$  le plus grand indice  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $a_k \neq 0$ , on convient que  $\deg(0) = -\infty$ .

Le coefficient du monôme non nul de plus haut degré est appelé **coefficient dominant** du polynôme  $P(X)$ .

Un polynôme de coefficient dominant égal à 1 est dit **unitaire**.

**Exemple 1.**  $X^5 - 1$  est un polynôme unitaire de degré 5.

**Exercice 2.** Déterminer le degré du polynôme  $P(X) = \sum_{k=0}^{k=5} (2^{k-4} - k + 3)X^k$ .

**Définition 4. Opérations sur les polynômes**

Étant donnés deux polynômes  $P(X) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$  et  $Q(X) = \sum_{k=0}^{k=m} b_k X^k$  et un scalaire  $\lambda$  réel ou complexe, on définit les polynômes :

$$\bullet (\lambda P)(X) = \sum_{k=0}^{k=n} c_k X^k \text{ avec :}$$

$$c_0 = \lambda a_0$$

$$c_1 = \lambda a_1$$

$$c_2 = \lambda a_2$$

$$\vdots$$

$$c_k = \lambda a_k \text{ pour tout } k \in \llbracket 0; n \rrbracket$$

$$\bullet (P + Q)(X) = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} c_k X^k \text{ avec :}$$

$$c_0 = a_0 + b_0$$

$$c_1 = a_1 + b_1$$

$$c_2 = a_2 + b_2$$

$$\vdots$$

$$c_k = a_k + b_k \text{ pour tout } k \in \llbracket 0; \max(n,m) \rrbracket \text{ en convenant que } a_k = 0 \text{ si } k > n \text{ et } b_k = 0 \text{ si } k > m$$

$$\bullet (P \times Q)(X) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \text{ avec :}$$

$$c_0 = a_0 b_0$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$$\vdots$$

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j \text{ pour tout } k \in \llbracket 0; n+m \rrbracket \text{ en convenant que } a_k = 0 \text{ si } k > n \text{ et } b_k = 0 \text{ si } k > m$$

**Propriété 1.** Pour tous polynômes  $P, Q, R$  à coefficients réels ou complexes, on a :

- $(P + Q) + R = P + (Q + R)$  (associativité de l'addition)
- $P + Q = Q + P$  (commutativité de l'addition)
- $(P \times Q) \times R = P \times (Q \times R)$  (associativité de la multiplication)
- $P \times Q = Q \times P$  (commutativité de la multiplication)
- $P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$  (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition)

**Exercice 3.** On considère les polynômes  $P = X^2 + 1$  et  $Q = X^3 + X$ , calculer le polynôme  $(P + Q)^2$ .

**Propriété 2.** On considère deux polynômes  $P$  et  $Q$  non nuls à coefficients réels ou complexes, alors  $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$ .

**Remarque 2.** Dans le cas où un des deux polynômes est nul, la propriété reste valable en convenant que  $(-\infty) + m = n + (-\infty) = -\infty$  et  $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ .

**Exercice 4.** Étant donnés deux polynômes  $P$  et  $Q$  non nuls à coefficients réels ou complexes, a-t-on  $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$  ?

## 2 Arithmétique dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$

On se place désormais dans  $\mathbb{K}[X]$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Définition 5.** On considère  $A, B \in \mathbb{K}[X]$ . S'il existe  $C \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $A = B \times C$  on dit que  $A$  est un **multiple** de  $B$  et que  $B$  est un **diviseur** de  $A$ .

**Exemple 2.** Les polynômes  $X - 1$  et  $X + 2$  sont des diviseurs du polynôme  $X^2 + X - 2$  car  $(X - 1)(X + 2) = X^2 + X - 2$ .

**Remarque 3.** Un polynôme non nul est divisible par n'importe quel polynôme constant non nul, par exemple le polynôme  $X^2 + X - 2$  est divisible par 3 car  $X^2 + X - 2 = 3(\frac{1}{3}X^2 + \frac{1}{3}X - \frac{2}{3})$ .

**Propriété 3.** Si un polynôme  $B$  divise un polynôme  $A$  non nul alors  $\deg(B) \leq \deg(A)$ .

**Exercice 5.** Déterminer tous les diviseurs unitaires de degré 1 ou 2 du polynôme  $X^3 + X$  dans  $\mathbb{C}[X]$  en cherchant les coefficients  $a, b, c$  tels que  $X^3 + X = (X + a)(X^2 + bX + c)$ .

### Propriété 4. Division euclidienne

On considère  $A, B \in \mathbb{K}[X]$  avec  $B \neq 0$  alors il existe un unique couple  $(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$  tel que  $A = B \times Q + R$  et  $\deg(R) < \deg(B)$ , les polynômes  $Q$  et  $R$  sont respectivement appelés **quotient** et **reste** de la **division euclidienne** de  $A$  par  $B$ .

**Exemple 3.** division euclidienne du polynôme  $3X^3 - 2X^2 + 2$  par le polynôme  $X - 1$

$$\begin{array}{r}
 3X^3 - 2X^2 \qquad \qquad \qquad +2 \\
 -(3X^3 - 3X^2) \qquad \qquad \qquad \\
 \qquad \qquad \qquad X^2 \qquad \qquad \qquad +2 \\
 \qquad \qquad \qquad -(X^2 - X) \qquad \qquad \qquad \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad X \qquad \qquad \qquad +2 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad -(X - 1) \qquad \qquad \qquad \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 3
 \end{array} \left| \begin{array}{l}
 X - 1 \\
 \hline
 3X^2 \\
 X \\
 1
 \end{array} \right.$$

On a donc  $3X^3 - 2X^2 + 2 = (X - 1)(3X^2 + X + 1) + 3$ .

**Exercice 6.** Effectuer la division euclidienne du polynôme  $X^3 + X^2 + X + 1$  par le polynôme  $X + 3$ .

**Propriété 5.** On considère  $A, B \in \mathbb{K}[X]$  avec  $B \neq 0$  alors  $B$  est un diviseur de  $A$  si et seulement si le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  est nul.

**Exercice 7.** Montrer que le polynôme  $X^2 + 1$  est un diviseur du polynôme  $X^5 + 2X^2 - X + 2$ .

**Exercice 8.** Montrer que la courbe représentative de la fonction  $f : x \mapsto \frac{2x^3 + x^2}{x^2 + 2}$  admet une asymptote oblique en  $\pm\infty$  et en donner une équation réduite.

### 3 Racines d'un polynôme

**Définition 6.** On dit que  $\alpha \in \mathbb{K}$  est une **racine** du polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  dans  $\mathbb{K}$  si  $P(\alpha) = 0$ .

**Remarque 4.** Dans cette définition,  $P(\alpha)$  représente l'image de  $\alpha$  par la fonction polynomiale associée au polynôme  $P$ .

**Exercice 9.** Déterminer les racines du polynôme  $X^3 + X$  dans  $\mathbb{C}$ .

**Propriété 6.** Un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$  admet  $\alpha \in \mathbb{K}$  pour racine si et seulement si il est divisible par  $X - \alpha$ .

**Exercice 10.** Déterminer les racines réelles du polynôme  $X^3 - 2X + 1$ . (on pourra chercher une racine évidente)

**Définition 7.** Étant donnée une racine  $\alpha$  d'un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  non nul, on définit son **ordre de multiplicité** comme le plus grand entier  $m$  tel que  $(X - \alpha)^m$  divise  $P$ .

**Remarque 5.** L'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme  $P$  non nul est un entier compris entre 1 et  $\deg(P)$ .

**Exercice 11.** Montrer que 1 est une racine du polynôme  $X^4 - X^3 - X + 1$  et déterminer son ordre de multiplicité.

**Propriété 7.** Si un polynôme non nul admet  $p$  racines distinctes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  d'ordres de multiplicité respectifs  $m_1, m_2, \dots, m_p$  alors  $P$  est divisible par  $(X - \alpha_1)^{m_1} (X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_p)^{m_p}$ .

**Corollaire 1.** Un polynôme non nul de degré  $n$  possède au plus  $n$  racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

**Exemple 4.** Le polynôme  $(X + 3)(X - 4)^2$  de degré 3 admet  $-3$  et  $4$  pour racines et leurs ordres de multiplicité sont 1 et 2 donc il admet 3 racines en comptant avec leurs ordres de multiplicité.

**Exercice 12.** Déterminer un polynôme de degré 3 tel que la somme des ordres de multiplicité de ses racines réelles soit strictement inférieure à 3.

**Corollaire 2.** Un polynôme admettant une infinité de racines distinctes est nul.

**Corollaire 3.** Une fonction polynomiale est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. Deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si elles ont mêmes coefficients.

## 4 Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles

**Définition 8.** Un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  est dit **irréductible** dans  $\mathbb{K}[X]$  s'il est de degré supérieur ou égal à 1 et si ses seuls diviseurs sont les polynômes  $\lambda$  et  $\lambda P$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ .

**Remarque 6.** Un polynôme irréductible n'admet pas de factorisation non triviale.

**Exemple 5.** Le polynôme  $X^2 - 1$  n'est pas irréductible dans  $\mathbb{K}[X]$  car  $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ , les polynômes  $X - 1$  et  $X + 1$  sont irréductibles dans  $\mathbb{K}[X]$ .

**Propriété 8.** Un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  de degré 1 est irréductible dans  $\mathbb{K}[X]$ .

**Remarque 7.** Un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  de degré supérieur ou égal à 2 admettant une racine dans  $\mathbb{K}$  est réductible dans  $\mathbb{K}[X]$ .

**Exercice 13.** Montrer que le polynôme  $X^2 + 1$  est irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$  mais réductible dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 14.** Déterminer un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  réductible dans  $\mathbb{R}[X]$  qui n'admet pas de racine réelle.

### Théorème 1. Théorème fondamental de l'algèbre

Tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  de degré supérieur ou égal à 1 admet au moins une racine dans  $\mathbb{C}$ .

**Corollaire 4.** Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  sont les polynômes de degré 1.

**Propriété 9.** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ , si  $\alpha$  est une racine complexe de  $P$  alors  $\bar{\alpha}$  est aussi une racine de  $P$  avec la même multiplicité.

**Propriété 10.** Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 n'admettant pas de racine réelle.

**Théorème 2.** Tout polynôme de  $\mathbb{K}[X]$  de degré supérieur ou égal à 1 se décompose de manière unique en produit d'une constante non nulle et de polynômes irréductibles unitaires à l'ordre des facteurs près.

**Exercice 15.** Décomposer le polynôme  $X^3 - X^2 + X - 1$  en produit de polynômes irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  puis dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Corollaire 5.** Tout polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  peut s'écrire sous la forme  $P(X) = \lambda(X - \alpha_1)^{m_1}(X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_p)^{m_p}$  avec  $\lambda$  un nombre complexe et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  des nombres complexes distincts, on dit que  $P$  est un **polynôme scindé**.

**Remarque 8.** Si  $P$  est non nul, on a  $m_1 + m_2 + \dots + m_p = \deg(P)$ .

**Exercice 16.** Décomposer le polynôme  $X^3 + X^2 + X + 1$  en produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Corollaire 6.** Tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  peut s'écrire sous la forme  $P(X) = \lambda(X - \alpha_1)^{m_1}(X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_p)^{m_p}(X^2 + \beta_1 X + \gamma_1)^{n_1}(X^2 + \beta_2 X + \gamma_2)^{n_2} \dots (X^2 + \beta_q X + \gamma_q)^{n_q}$  avec  $\lambda$  un nombre réel et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ;  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$  et  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q$  des nombres réels avec  $\beta_k^2 - 4\gamma_k < 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ .

**Exercice 17.** Décomposer le polynôme  $4X^3 - 4X^2 + X - 1$  en produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .

### Propriété 11. Somme et produit des racines d'un polynôme scindé

On considère un polynôme de degré  $n \geq 1$  scindé  $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n = \lambda(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n)$  alors  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$  et  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$ .

**Exercice 18.** Montrer que le polynôme  $X^3 - 3X - 1$  admet trois racines réelles et déterminer leur somme et leur produit.

## 5 Polynôme dérivé

**Définition 9.** On appelle **polynôme dérivé** d'un polynôme  $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n = \sum_{k=0}^{k=n} a_kX^k$  le polynôme  $P'(X) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0 \\ a_1 + 2a_2X + \dots + na_nX^{n-1} = \sum_{k=1}^{k=n} ka_kX^{k-1}, & \text{si } n > 0 \end{cases}$ .

**Propriété 12.** On considère  $P \in \mathbb{K}[X]$  alors  $\deg(P') = \begin{cases} -\infty, & \text{si } \deg(P) \leq 0 \\ \deg(P) - 1, & \text{si } \deg(P) > 0 \end{cases}$ .

**Propriété 13.** Si  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  alors  $(P + Q)' = P' + Q'$ ,  $(\lambda P)' = \lambda P'$  et  $(PQ)' = P'Q + PQ'$ .

**Remarque 9.** On peut également définir par récurrence la dérivée  $k$ -ième d'un polynôme.

**Exercice 19.** On considère  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ , déterminer  $(PQ)''$  et  $(PQ)'''$ .

### Théorème 3. Formule de Leibniz

On considère deux polynômes  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$  et  $n \in \mathbb{N}$  alors :

$$(P \times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

**Exercice 20.** Exprimer la dérivée 3-ième de  $P(X)Q(X)$  puis de  $X^3P(X)$  à l'aide de la formule de Leibniz.

**Propriété 14.** On note  $P(X) = X^n$  avec  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $P^{(k)}(X) = \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

**Exercice 21.** On considère le polynôme  $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ , calculer  $P^{(k)}(0)$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

### Théorème 4. Formule de Taylor en 0

On considère un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  de degré  $n \in \mathbb{N}$  alors :

$$P(X) = P(0) + P'(0)X + \frac{P''(0)}{2!}X^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}X^n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k$$

### Corollaire 7. Formule de Taylor en $\alpha$

On considère un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  de degré  $n \in \mathbb{N}$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$  alors :

$$P(X) = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2!}(X - \alpha)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X - \alpha)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X - \alpha)^k$$

**Corollaire 8.** On considère un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  non nul alors  $\alpha \in \mathbb{K}$  est une racine d'ordre  $m$  de  $P$  si et seulement si  $P(\alpha), P'(\alpha), \dots, P^{(m-1)}(\alpha) = 0$  et  $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$ .

**Exercice 22.** Montrer que 1 est une racine du polynôme  $X^4 - X^3 - X + 1$  et déterminer son ordre de multiplicité.

## Exercices supplémentaires

### Exercice 23

On considère le polynôme  $P(X) = X^2 - X + 1$ . Calculer  $(P(X))^2$  et  $P(P(X))$ .

### Exercice 24

Déterminer le degré du polynôme  $P(X) = (1 + X^2)(2 + X^2)(3 + X^2) - (3X + X^3)^2$ .

### Exercice 25

Déterminer un polynôme  $P$  tel que  $P(0) = 1$ ,  $P(1) = 2$ ,  $P(2) = 4$  et  $P(3) = 8$ .

### Exercice 26 (★)

Étant donné  $n \in \mathbb{N}$ , on considère le polynôme  $P_n(X) = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k}$ .

Calculer  $P_0(X)$ ,  $P_1(X)$ ,  $P_2(X)$  et  $P_3(X)$ , que peut-on dire de  $P_n(X)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  ?

### Exercice 27 (★)

Montrer qu'un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  est pair si et seulement si il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P(X) = Q(X^2)$ .

### Exercice 28 (★)

Étant donné  $n \in \mathbb{N}$ , on définit le polynôme  $P_n(X) = (X^2 + 1)^n + (X^2 - 1)^n - 2X^{2n}$ .

Calculer  $P_0(X)$ ,  $P_1(X)$ ,  $P_2(X)$  et  $P_3(X)$  puis déterminer le degré de  $P_n(X)$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 29

Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  vérifiant l'égalité  $(P(X))^2 = XP(2X + 3) + 4$ .  
(on pourra commencer par déterminer le degré de  $P$ )

### Exercice 30 (★)

Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  vérifiant l'égalité  $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ .  
(on pourra commencer par déterminer le degré de  $P$ )

### Exercice 31 (★)

Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  vérifiant l'égalité  $P(P(X)) = P(X)$ .  
(on pourra commencer par déterminer le degré de  $P$ )

### Exercice 32 (★)

Montrer que  $X^2$  divise  $(X + 1)^n - nX - 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
(on pourra commencer par déterminer les coefficients des monômes de degré 0 et 1)

### Exercice 33

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de  $X^3 + X^2 + 9$  par  $X^2 - 2X + 3$ .

**Exercice 34**

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de  $X^4 + iX^2 + 1$  par  $X^2 + iX + 1$ .

**Exercice 35** (★)

Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que le polynôme  $X^2 + aX + 1$  divise le polynôme  $X^4 + bX^2 + 1$ .

**Exercice 36** (★)

Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré 3 dont le reste de la division euclidienne par  $X^2 - 1$  est  $1 - X$  et dont le reste de la division euclidienne par  $X^2 + 1$  est  $X - 1$ .

**Exercice 37** (★)

On considère deux nombres complexes  $\alpha$  et  $\beta$  distincts et un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$ . Exprimer le reste de la division euclidienne de  $P(X)$  par  $(X - \alpha)(X - \beta)$  en fonction de  $P(\alpha)$  et  $P(\beta)$ .

**Exercice 38**

Déterminer les racines réelles ou complexes des polynômes  $X^3 - 1$  et  $X^4 - 1$ .

**Exercice 39**

Déterminer les racines réelles ou complexes du polynôme  $X^4 + X^3 - 2X^2 - X + 1$ .

**Exercice 40** (★)

Déterminer les racines réelles ou complexes du polynôme  $X^5 - 1$ .

**Exercice 41**

On considère le polynôme  $P(X) = X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 + 2X + 1$ . Montrer que  $-1$  est racine de  $P$  et déterminer son ordre de multiplicité.

**Exercice 42**

Décomposer le polynôme  $P(X) = X^3 - X^2 + 2iX - 2i$  en produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 43**

Décomposer le polynôme  $P(X) = X^4 - 1$  en produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 44**

Décomposer le polynôme  $P(X) = X^3 - 2X^2 + 2X$  en produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 45**

Montrer que  $i$  est une racine complexe du polynôme  $P(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ , en déduire une factorisation de  $P(X)$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .



**Exercice 46** (★)

Décomposer le polynôme  $X^n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  en produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 47**

Montrer que le polynôme  $X^3 - X^2 - 2X + 1$  admet trois racines réelles distinctes  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  et déterminer pour chacune de ces racines un encadrement par deux entiers consécutifs, calculer leur somme et leur produit.

**Exercice 48** (★)

Déterminer les racines complexes du polynôme  $4X^3 + 24X^2 + 47X + 33$  sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

**Exercice 49** (★)

On considère un nombre complexe  $\alpha$  et un polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$ . Exprimer le reste de la division euclidienne de  $P(X)$  par  $(X - \alpha)^2$  en fonction de  $P(\alpha)$  et  $P'(\alpha)$ .

**Exercice 50** (★)

Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $3P(X) = XP'(X) + P''(X)$ .  
(on pourra commencer par déterminer le degré de  $P$ )

**Exercice 51** (★)

Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  vérifiant l'égalité  $P'^2 = 4P$ .  
(on pourra commencer par déterminer le degré de  $P$ )

**Exercice 52** (★)

Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  vérifiant l'égalité  $P' + P = \frac{1}{n!}X^n$  avec  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 53**

Déterminer un polynôme  $P$  tel que  $P(0) = 1$ ,  $P'(0) = 2$ ,  $P''(0) = 4$  et  $P'''(0) = 8$ .

**Exercice 54**

Déterminer  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P(1) = 0$ ,  $P'(1) = 1$ ,  $P''(1) = 2$  et  $P^{(k)}(1) = 0$  pour tout  $k \geq 3$ .

**Exercice 55**

Montrer que le polynôme  $P(X) = 1 - X + X^2 - 9X^9 + 8X^{10}$  est divisible par  $(X - 1)^2$ .

**Exercice 56** (★)

Déterminer  $z \in \mathbb{C}$  pour que le polynôme  $P(X) = X^3 + 3X + z$  admette une racine double, factoriser dans ce cas le polynôme  $P(X)$ .

**Exercice 57** (★)

Montrer que 1 est racine du polynôme  $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et déterminer son ordre.

**Exercice 58** (\*\*)

Montrer que le polynôme  $X^{n+2} - X + 1$  n'admet que des racines simples pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 59** (\*\*)

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  le polynôme  $P_n(X) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{X^k}{k!}$  possède  $n$  racines distinctes dans  $\mathbb{C}$ .

## Réponses

- 1)  $P(X) = 1X^0 + (-1)X^1 + 2X^2$  et  $Q(X) = -1X^0 + 0X^1 + 0X^2 + 0X^3 + 0X^4 + 1X^5$ .
- 2)  $a_5 = a_4 = 0$  et  $a_3 = \frac{1}{2} \neq 0$ .
- 3)  $(P + Q)^2 = 1 + 2X + 3X^2 + 4X^3 + 3X^4 + 2X^5 + X^6$ .
- 4) On considère  $P(X) = 1 + X^2$  et  $Q(X) = 1 - X^2$ .
- 5)  $X$ ,  $X - i$  et  $X + i$ .
- 6)  $X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 3)(X^2 - 2X + 7) - 20$ .
- 7)  $X^5 + 2X^2 - X + 2 = (X^2 + 1)(X^3 - X + 2)$ .
- 8) On montre que  $f(x) = 2x + 1 - \frac{4x + 2}{x^2 + 2}$ .
- 9)  $0$ ,  $i$  et  $-i$ .
- 10)  $1$ ,  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$  et  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .
- 11)  $1$  est racine d'ordre 2 du polynôme  $X^4 - X^3 - X + 1$ .
- 12)  $X(X^2 + 1)$ .
- 13) On cherche un diviseur unitaire de degré 1.
- 14)  $(X^2 + 1)^2$ .
- 15)  $X^3 - X^2 + X + 1 = (X - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X - i)(X + i)$ .
- 16)  $X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X - i)(X + i)$ .
- 17)  $4X^3 - 4X^2 + X - 1 = (X - 1)(4X^2 + 1)$ .
- 18) La fonction  $f : x \mapsto x^3 - 3x - 1$ , s'annule en  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  avec  $-2 \leq \alpha \leq -1$ ,  $-1 \leq \beta \leq 0$  et  $1 \leq \gamma \leq 2$  de plus  $\alpha + \beta + \gamma = 3$  et  $\alpha\beta\gamma = 1$ .
- 19)  $(PQ)'' = P'' + 2P'Q' + Q''$  et  $(PQ)''' = P''' + 3P''Q' + 3P'Q'' + Q'''$ .
- 20)  $(PQ)''' = P'''Q + 3P''Q' + 3P'Q'' + PQ'''$  d'où  $6P + 18XP' + 9X^2P'' + X^3P'''$ .
- 21)  $P^{(k)}(0) = k!a_k$ .
- 22) On a  $P(1) = P'(1) = 0$  et  $P''(1) \neq 0$ .
- 23)  $(P(X))^2 = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1$  et  $P(P(X)) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - X + 1$ .
- 24)  $P(X) = 6 + 2X^2$ .
- 25)  $P(X) = \frac{1}{6}X^3 + \frac{5}{6}X + 1$ .
- 26)  $P_n(X) = [X + (1 - X)]^n = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- 27) On montre que  $P(X) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^{2k}$ .
- 28)  $\deg(P) = -\infty$  si  $n < 2$  et  $\deg(P) = 2n - 4$  si  $n \geq 2$ .
- 29)  $P(X) = 2(X + 1)$ .
- 30)  $P(X) = a(X^2 - 1)$  avec  $a \in \mathbb{C}$ .
- 31)  $P$  est un polynôme constant ou le polynôme identité.
- 32)  $a_0 = \binom{n}{0} - 1 = 0$  et  $a_1 = \binom{n}{1} - n = 0$ .
- 33)  $Q(X) = X + 3$  et  $R(X) = 3X$ .
- 34)  $Q(X) = X^2 - iX + (-2 + i)$  et  $R(X) = (1 + 3i)X + (3 - i)$ .

- 35)  $R(X) = a(2 - b - a^2)X + (b - 2 + a^2)$  d'où  $a^2 + b = 2$ .
- 36)  $P(X) = -X^3 + X^2$ .
- 37)  $R(X) = \frac{P(\alpha) - P(\beta)}{\alpha - \beta}X + \frac{\alpha P(\beta) - \beta P(\alpha)}{\alpha - \beta}$ .
- 38)  $1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $1; i; -1; -i$ .
- 39) Les racines sont  $1, -1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  et  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$  car  $P(X) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + X - 1)$ .
- 40)  $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$  pour  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  car le nombre de racines ne peut pas être supérieur au degré du polynôme.
- 41)  $-1$  est une racine d'ordre 3 du polynôme  $P$  car  $P(X) = (X + 1)^3(X^2 - X + 1)$ .
- 42)  $P(X) = (X - 1)(X - 1 + i)(X + 1 - i)$ .
- 43)  $P(X) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)$ .
- 44)  $P(X) = X(X^2 - 2X + 2) = X(X - 1 - i)(X - 1 + i)$
- 45)  $P(X) = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$ .
- 46)  $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{k=n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$ .
- 47)  $-2 < \alpha < -1, 0 < \beta < 1, 1 < \gamma < 2$  de plus  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  et  $\alpha\beta\gamma = -1$ .
- 48)  $-3, \frac{-3 - i\sqrt{2}}{2}$  et  $\frac{-3 + i\sqrt{2}}{2}$ .
- 49)  $P(X) = P'(\alpha)(X - \alpha) + P(\alpha)$ .
- 50)  $P(X) = aX(X^2 + 3)$  avec  $a \in \mathbb{C}$ .
- 51)  $P = 0$  ou  $P = (X + a)^2$  avec  $a \in \mathbb{C}$ .
- 52)  $P(X) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!} X^k$ .
- 53)  $P(X) = 1 + 2X + 2X^2 + \frac{4}{3}X^3$ .
- 54)  $P(X) = 0 + 1(X - 1) + 2\frac{(X - 1)^2}{2!} = X^2 - X$ .
- 55) On remarque que  $P(1) = P'(1) = 0$ .
- 56)  $z = -2i$  et  $P(X) = (X + 2i)(X - i)^2$  ou  $z = 2i$  et  $P(X) = (X - 2i)(X + i)^2$ .
- 57)  $1$  est racine d'ordre 2.
- 58) Une racine double  $\alpha$  de  $P$  est racine de  $P'$ , on obtient  $\alpha = \frac{n+2}{n+1} > 1$  et  $\alpha^{n+1} = \frac{1}{n+2} < 1$ .
- 59) On remarque que  $P_n(X) = \frac{X^n}{n!} + P'_n(X)$  et on en déduit que  $P_n$  ne possède pas de racine d'ordre supérieur ou égal à 2.