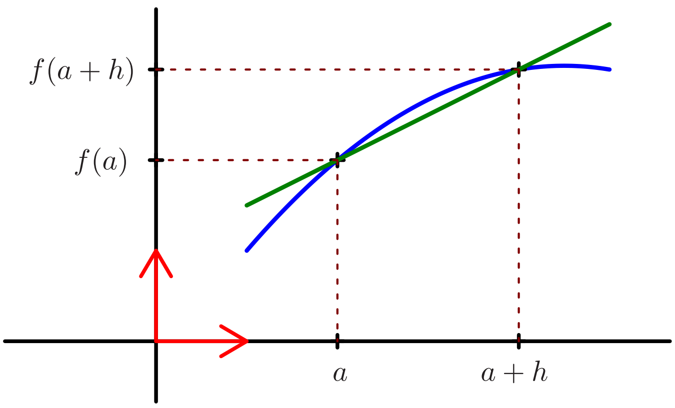
XIII. Dérivation

1 Dérivée d'une fonction

Définition 1. *On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$, on appelle* **taux d'accroissement** *de la fonction f en a la fonction $\Delta_{f,a} : h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.*



$\Delta_{f,a}(h)$ peut s'interpréter graphiquement comme le coefficient directeur de la droite passant par les points d'abscisses a et $a+h$ de la courbe représentative de la fonction f.

Définition 2. *On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$:*

- *si $\Delta_{f,a}$ admet une limite finie à droite en 0, on dit que f est* **dérivable à droite** *en a et on appelle cette limite* **nombre dérivé à droite** *de la fonction f en a que l'on note $f'_d(a)$.*
- *si $\Delta_{f,a}$ admet une limite finie à gauche en 0, on dit que f est* **dérivable à gauche** *en a et on appelle cette limite* **nombre dérivé à gauche** *de la fonction f en a que l'on note $f'_g(a)$.*
- *si $\Delta_{f,a}$ admet une limite finie à droite et une limite finie à gauche en 0 égales, on dit que f est* **dérivable** *en a et on appelle cette limite* **nombre dérivé** *de la fonction f en a que l'on note $f'(a)$.*

Exercice 1. *Montrer que la fonction inverse est dérivable en $a \in \mathbb{R}^*$ et calculer son nombre dérivé en a.*

Exercice 2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.*

Exercice 3. *Montrer que la fonction valeur absolue est dérivable à droite et à gauche en 0 mais n'est pas dérivable en 0.*

Propriété 1. *On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ dérivable en $a \in I$, alors la courbe représentative de la fonction f admet une tangente au point d'abscisse a d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.*

Remarque 1. *Dans le cas ou la fonction est dérivable à gauche ou à droite en a sa courbe représentative admet une demi-tangente à gauche ou à droite en a.*

Remarque 2. *Dans le cas ou le taux d'accroissement de la fonction f en a admet une limite infinie en 0, la courbe représentative de la fonction f admet une tangente verticale au point d'abscisse a.*

Définition 3. *Une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ dérivable en tout point de I est dite dérivable sur I et on appelle* **dérivée** *de la fonction f la fonction $f' : a \mapsto f'(a)$. On note $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies et dérivables sur I.*

On suppose connus les intervalles de dérivabilité ainsi que les dérivées des fonctions usuelles.

Propriété 2. Développement limité d'ordre 1
On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ dérivable en $a \in I$, alors :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)}$$

Exercice 4. *Déterminer un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 de $\sin x$, $\sqrt{1+x}$, e^x et $\ln(1+x)$.*

Corollaire 1. $\boxed{\text{Une fonction } f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R}) \text{ dérivable en } a \in I \text{ est continue en } a.}$

Contre-exemple 1. *La fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.*

Propriété 3. *On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$ pour laquelle il existe $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \underset{x\to a}{=} c + d(x-a) + o(x-a)$ alors $f(a) = c$ et f est dérivable en a avec $f'(a) = d$.*

2 Opérations sur les dérivées

Propriété 4. *On considère deux fonctions $u, v \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$, alors :*

- *$u + v$ est dérivable sur I et* $\boxed{(u+v)' = u' + v'}$.
- *$u \times v$ est dérivable sur I et* $\boxed{(u\times v)' = u' \times v + u \times v'}$.
- *si u ne s'annule pas sur I, $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et* $\boxed{\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}}$.
- *si v ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et* $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}}$.

Propriété 5. *On considère une fonction $f : I \to J$ bijective et dérivable sur I telle que f' ne s'annule pas sur I, alors son application réciproque g est dérivable sur J et* $\boxed{g' = \dfrac{1}{f' \circ g}}$.

Exercice 5. *Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x \end{array}$ est bijective, que son application réciproque $\arctan$ est dérivable et calculer $\arctan'$.*

Propriété 6. *On considère une fonction $u \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et une fonction $v \in \mathcal{D}(J,\mathbb{R})$ avec $u(I) \subset J$, alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et* $\boxed{(v\circ u)' = u' \times (v' \circ u)}$.

Exercice 6. *Montrer que la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.*

3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

On peut définir par récurrence (si elle existe) la dérivée n-ième d'une fonction pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. *Montrer pour $k \in \mathbb{N}$ que la fonction $f : x \mapsto x^k$ est n fois dérivable pour $n \in [\![0,k]\!]$ et calculer $f^{(n)}$.*

Définition 4. *On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I. On note $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I*

Remarque 3. *Les fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ sur I sont les fonctions continues sur I.*

Remarque 4. *Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à n sont continues sur I.*

Exercice 8. *Déterminer la classe de la fonction $f : x \mapsto x^3|x|$ sur $\mathbb{R}$.*

Définition 5. *On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I*

Exercice 9. *Montrer que la fonction cosinus est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\cos^{(n)}$.*

Propriété 7. *On considère deux fonctions $u, v \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ n fois dérivables sur I alors la fonction $u+v$ est n fois dérivable sur I et $\boxed{(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}}$.*

Corollaire 2. *On considère $u, v \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ alors $u+v \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$.*

Propriété 8. Formule de Leibniz
On considère deux fonctions $u, v \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ n fois dérivables sur I alors la fonction $u \times v$ est n fois dérivable sur I et $\boxed{(u \times v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} u^{(k)} \times v^{(n-k)}}$.

Exercice 10. *Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 e^x$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée n-ième.*

Corollaire 3. *On considère $u, v \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ alors $u \times v \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$.*

Remarque 5. *On peut étendre la propriété au quotient si v ne s'annule pas sur I.*

Propriété 9. *On considère $u \in \mathcal{C}^n(I,J)$ et $v \in \mathcal{C}^n(J,\mathbb{R})$ alors $v \circ u \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$.*

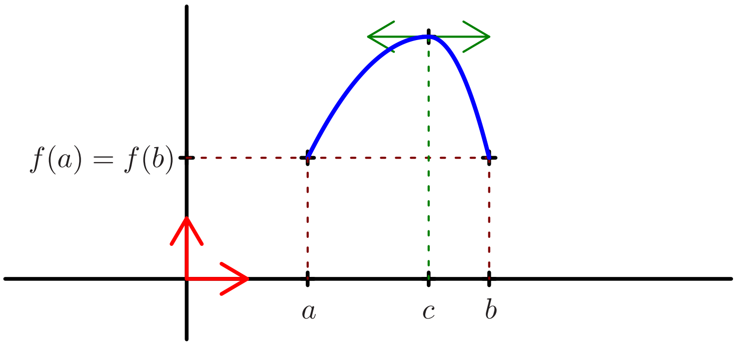
Propriété 10. *On considère $f \in \mathcal{C}^n(I,J)$ avec $n \geqslant 1$ admettant une application réciproque g et telle que f' ne s'annule pas sur I, alors $g \in \mathcal{C}^n(J,I)$.*

4 Propriétés des fonctions dérivables

Propriété 11. *On considère une fonction f à valeurs réelles définie à gauche et à droite de a et admettant un extremum local en a, si f est dérivable en a alors $f'(a) = 0$.*

Contre-exemple 2. *La fonction cube possède une dérivée qui s'annule en 0 mais elle n'admet pas d'extremum local en 0.*

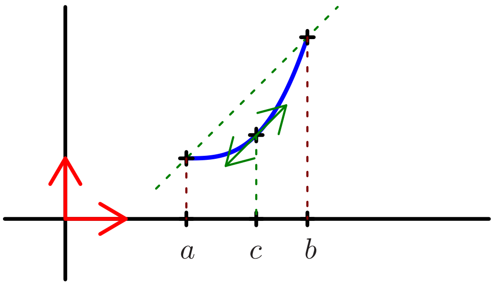
Théorème 1. Théorème de Rolle
On considère une fonction f à valeurs réelles continue sur un intervalle $[a;b]$ non réduit à un point et dérivable sur $]a;b[$ telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Remarque 6. *c n'est pas forcément unique.*

Remarque 7. *Si la fonction f est dérivable sur $[a;b]$ alors elle est* a fortiori *continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.*

Théorème 2. Théorème des accroissements finis
On considère une fonction f à valeurs réelles continue sur un intervalle $[a;b]$ non réduit à un point et dérivable sur $]a;b[$ alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.



Corollaire 4. Inégalité des accroissements finis
On considère une fonction f à valeurs réelles continue sur un intervalle $[a;b]$ non réduit à un point et dérivable sur $]a;b[$ telle que $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ pour tout $x \in]a;b[$ alors $m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$.

Remarque 8. *Si $|f'(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in]a;b[$ alors $|f(b) - f(a)| \leqslant M(b-a)$.*

Exercice 11. *Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que $\tan x \geqslant x$ pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$.*

Propriété 12. *On considère une fonction f à valeurs réelles définie et dérivable sur I, alors :*
- *Si $f' = 0$ sur I alors f est constante sur I.*
- *Si $f' \geqslant 0$ (respectivement $f' > 0$) sur I alors f est croissante (respectivement strictement croissante) sur I.*
- *Si $f' \leqslant 0$ (respectivement $f' < 0$) sur I alors f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur I.*

Exercice 12. *Montrer que si f est une fonction croissante sur I et dérivable sur I alors $f' \geqslant 0$ sur I.*

Contre-exemple 3. *La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée s'annule en 0.*

Théorème 3. Théorème de la limite de la dérivée
On considère une fonction f à valeurs réelles continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b]$, si f' admet une limite à droite en a alors $\Delta_{f,a}$ admet la même limite à droite en 0.

Remarque 9. *On peut également formuler ce résultat dans le cas d'une limite à gauche.*

Remarque 10. *Dans le cas où f' admet une limite finie en a, on en déduit que la fonction f est dérivable en a.*

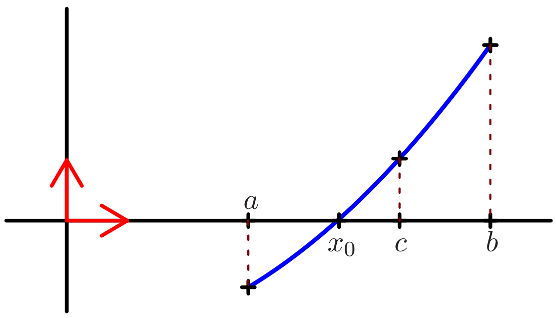
Exercice 13. *Montrer que la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ est dérivable en 0 en étudiant la limite du taux d'accroissement puis en utilisant la remarque 10.*

Exercice 14. *Montrer que la fonction* $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \end{array}$ *est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*

5 Calcul approché des zéros d'une fonction

5.1 Méthode de dichotomie

Propriété 13. *On considère une fonction $f \in \mathcal{C}([a;b],\mathbb{R})$ strictement monotone avec $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur l'intervalle $[a;b]$ et pour tout $c \in]a;b[$:*
- *si $f(c) = 0$ alors $x_0 = c$.*
- *si $f(a)f(c) < 0$ alors $x_0 \in]a;c[$.*
- *si $f(c)f(b) < 0$ alors $x_0 \in]c;b[$.*



La ***méthode de dichotomie*** consiste à itérer cette discrimination afin d'obtenir un encadrement de plus en plus précis de la racine de f, on choisit en général pour c le centre de l'intervalle $[a;b]$.

Exercice 15. *Déterminer un encadrement d'amplitude $\frac{1}{8}$ par des nombres rationnels de $\sqrt{2}$ en utilisant la méthode de dichotomie appliquée à la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$ sur l'intervalle $[1;2]$.*

Exercice 16. *Que peut-on dire de l'amplitude d'un encadrement obtenu après n étapes de la méthode de dichotomie ?*

5.2 Utilisation de suites récurrentes

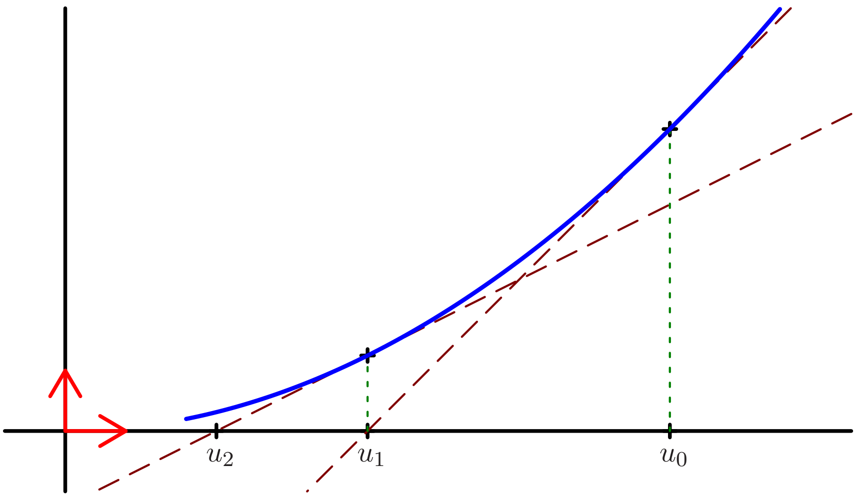
Propriété 14. *On considère une fonction $f \in \mathcal{C}(I, I)$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in I$ on a $f(l) = l$.*

Exercice 17. *On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par* $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{2u_n+2}{u_n+2} \end{array}\right.$.

1. *Montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (on pourra étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+2}{x+2}$)*
2. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$. (on pourra utiliser le théorème de convergence monotone)*
3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$. (on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[u_n; \sqrt{2}]$)*

5.3 Méthode de Newton

On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec f' ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, la ***méthode de Newton*** consiste en la construction d'une suite récurrente $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.



Exercice 18. *On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$.*

1. *Déterminer la relation de récurrence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la fonction f par la méthode de Newton.*
2. *On pose $u_0 = 2$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l = \sqrt{2}$. (on pourra utiliser le théorème de convergence monotone)*
3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \dfrac{u_n^2 - 2}{2u_n^2}(u_n - \sqrt{2})$. (on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[\sqrt{2}; u_n]$)*
4. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}|u_n - \sqrt{2}|^2$.*

Exercices supplémentaires

Exercice 19

La fonction $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} 2x^2+x+2 & \text{si} & x<1 \\ x^2+3x+1 & \text{si} & x \geqslant 1 \end{array} \right. \end{array}$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 20

Les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto x\sqrt{x}$ sont-elles dérivables à droite en 0 ?

Exercice 21

Montrer que la fonction $x \mapsto x \ln x$ peut se prolonger par continuité en une fonction $\tilde{f}$ définie sur $[0; +\infty[$. La fonction $\tilde{f}$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 22

Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe d'équation $y = \sqrt{x^2-1}$ au point d'abscisse 2.

Exercice 23 ($\star$)

Déterminer les points M de la parabole d'équation $y = 1+4x^2$ tels que la tangente à la parabole au point M passe par l'origine du repère.

Exercice 24 ($\star$)

On considère $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que si f est paire alors f' est impaire et que si f est impaire alors f' est paire.

Exercice 25

Déterminer un développement limité d'ordre 1 de $\ln(1+\sin x)$ en 0, en déduire $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}$.

Exercice 26

Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $\arctan x$.

Exercice 27 ($\star$)

Étudier $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$ puis $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{\pi}{3} \\ x\neq \frac{\pi}{3}}} \dfrac{2\cos x - 1}{\pi - 3x}$.

Exercice 28 ($\star$)

Montrer que si une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est dérivable en $a \in I$ alors $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a)$.

Exercice 29 ($\star$)

On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ dérivable en $a \in I$, étudier $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}$.

Exercice 30

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.

Exercice 31

Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + x^3 \end{array}$ est bijective, que son application réciproque g est dérivable et calculer $g'(2)$.

Exercice 32

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.

Exercice 33 ($\star$)

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k e^{kx}$.

Exercice 34 ($\star$)

Montrer que $\arctan\left(\dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\right) = 2\arctan\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 35

Montrer que la fonction $f : x \mapsto xe^x$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f^{(n)}(x)$.

Exercice 36 ($\star$)

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est n fois dérivable sur $]-1;1[$ et déterminer $f^{(n)}(x)$. En déduire que les fonctions $g : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ sont n fois dérivables sur $]-1;1[$ et déterminer $g^{(n)}(x)$ et $h^{(n)}(x)$.

Exercice 37

Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 38

Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ en une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 39 ($\star$)

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $t^3 y' - 2y = 0$ définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 40

Montrer en utilisant la formule de Leibniz que la fonction $x \mapsto x^2 e^{2x}$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée n-ième.

Exercice 41 ($\star$)

Montrer que la fonction $x \mapsto (x^2 + x + 1)e^{-x}$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée n-ième.
(on pourra utiliser la formule de Leibniz)

Exercice 42

On considère le polynôme $P(X) = (X-1)(X-2)(X-3)(X-4)(X-5)$. Montrer que $P'(X)$ admet quatre racines réelles distinctes.

Exercice 43 ($\star$)

On considère une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ périodique, montrer que f' s'annule une infinité de fois.

Exercice 44 ($\star$)

On considère $f, g \in \mathcal{D}([a;b], \mathbb{R})$ avec g' ne s'annulant pas sur $[a;b]$. Montrer que $g(a) \neq g(b)$ et qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.
(on pourra considérer la fonction $h : x \mapsto [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$)

Exercice 45

Encadrer $\arctan\left(\dfrac{5}{4}\right) - \dfrac{\pi}{4}$ en utilisant l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 46 ($\star$)

Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que $x \cos x \leqslant \sin x \leqslant x$ pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 47 ($\star$)

Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 48

Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \geqslant 1 \\ (1-x^2)^2 & \text{si} \quad |x| < 1 \end{cases} \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 49 ($\star\star$)

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\ln(1+x^4)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 50

On considère l'équation $(E) : (x-1)e^x + x = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution réelle α et l'encadrer par deux entiers consécutifs.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
   (b) Montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 51

On considère la fonction $f : x \mapsto xe^{-x^2}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la fonction f par la méthode de Newton vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2{u_n}^3}{2{u_n}^2 - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que si $u_0 = \pm\dfrac{1}{2}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 52

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln x - 1$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la fonction f par la méthode de Newton vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n(2 - \ln u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que si $u_0 \in]0; e]$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par e et en déduire qu'elle converge vers e.
3. Montrer que si $u_0 \in]0; e]$ alors $e - u_{n+1} \leqslant (e - u_n)(1 - \ln u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que si $u_0 \in [1; e]$ alors $e - u_{n+1} \leqslant (e - u_n)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Réponses

1) $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

2) $f'(a) = na^{n-1}$.

3) $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$.

4) $\sin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$, $\sqrt{x+1} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$; $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$ et $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$.

5) On remplace x par a puis on calcule le taux d'accroissement de f en a.

6) $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

7) $f'(x) = \frac{2}{e^x+e^{-x}}$.

8) $f'(x) = \frac{k!}{(k-n)!}x^{k-n}$.

9) f est de classe $\mathcal{C}^3$ avec $f'(x) = 4x^2|x|$, $f''(x) = 12x|x|$ et $f'''(x) = 24|x|$.

10) $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

11) $f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x$.

12) On montre que $\tan b - \tan 0 \leqslant 1 \times (b - 0)$.

13) On montre que le taux d'accroissement est positif.

14) $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ admet une limite en 0 à droite.

15) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ tend vers 0 en 0 à droite.

16) $\sqrt{2} \in [\frac{11}{8}; \frac{3}{2}]$.

17) L'amplitude de l'encadrement est $\frac{b-a}{2^n}$.

18) On montre que si $x \in [0;2]$ alors $f(x) \in [0;2]$ puis on procède par récurrence ; on montre que la suite est croissante et majorée donc convergente vers l telle que $f(l) = l$; on montre que $|f(u_n) - f(l)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - l|$.

19) $u_{n+1} = \frac{u_n^2+2}{2u_n}$; on montre que la suite est décroissante minorée par 0 ; on pose $\varphi(x) = \frac{x^2+2}{2x}$ et on montre que $|\varphi(u_n) - \varphi(\sqrt{2})| \leqslant \frac{u_n^2-2}{2u_n^2}|u_n - \sqrt{2}|$ car φ' est croissante sur $[0; +\infty[$; on montre que $\frac{u_n+\sqrt{2}}{2u_n^2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ si $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

20) On montre que $\Delta_{f,0}$ admet 5 pour limite à gauche et à droite en 0.

21) La fonction f n'est pas dérivable à droite en 0, la fonction g est dérivable à droite en 0.

22) $\tilde{f}$ n'est pas dérivable en 0.

23) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(2x - 1)$.

24) $M_1(\frac{1}{2}; 2)$ et $M_2(-\frac{1}{2}; 2)$.

25) On montre que si f est paire $\Delta_{f,-a}(h) = -\Delta_{f,a}(-h)$ et que si f est impaire $\Delta_{f,-a}(h) = \Delta_{f,a}(-h)$.

26) 1.

27) $\arctan x \underset{x\to 0}{\sim} x$.

28) $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

29) On utilise un développement limité d'ordre 1 de f en a.

30) $f(a) - af'(a)$.

31) $f'(x) = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$.

32) $g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{4}$.

33) $f'(x) = \frac{2}{e^{2x}+e^{-2x}}$.

34) On pose $f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} e^{kx} = \dfrac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x}$, la somme cherchée est $f'(x) = \dfrac{ne^{(n+2)x} - (n+1)e^{(n+1)x} + e^x}{(1-e^x)^2}$.
(on traite séparément le cas $x = 0$)

35) On procède par dérivation en remarquant que les fonctions associées ont même dérivée et même valeur en 0.

36) $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$.

37) $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ et $g^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$, on remarque que $h = \frac{1}{2}(f+g)$.

38) On montre que f est continue en 0, dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$ et que f' est continue en 0.

39) Le prolongement par continuité de f est dérivable mais sa dérivée n'est pas continue en 0.

40) $f(t) = \begin{cases} C_1 e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si} \quad t < 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \\ C_2 e^{-\frac{1}{t^2}} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$.

41) $f^{(n)}(x) = (2^n x^2 + n2^n x + n(n-1)2^{n-2})e^{2x}$.

42) Pour $n \geqslant 2$, on a $f^{(n)}(x) = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} (x^2+x+1) \times (-1)^n e^{-x} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} (2x+1) \times (-1)^{n-1} e^{-x} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} 2 \times (-1)^{n-2} e^{-x} = (-1)^n [x^2 + (1-2n)x + (n-1)^2] e^{-x}$ et la formule est valable également pour $n = 0$ ou $n = 1$.

43) On uilise le théorème de Rolle sur les intervalles $[1;2]$, $[2;3]$, $[3;4]$ et $[4;5]$.

44) On utilise le théorème de Rolle.

45) On utilise le théorème de Rolle.

46) Le réel est dans l'intervalle $[\frac{4}{41}; \frac{1}{8}]$.

47) On remarque que $\sin'(\theta) = \cos(\theta) \in [\cos x; 1]$ pour $\theta \in [0; x]$.

48) On remarque que $\frac{1}{1+c} \in [\frac{1}{1+x}; 1]$ pour $c \in [0; x]$.

49) On montre en utilisant le théorème de la limite de la dérivée que f est dérivable en -1 et 1.

50) On montre que $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} x^2$ puis on utilise le théorème de la limite de la dérivée.

51)
1. $\alpha \in [0; 1]$.
2. (a) On utilise le théorème de la limite monotone en remarquant que la suite est croissante et majorée par 1.
   (b) On applique l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[u_n; \alpha]$ à la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}$ en remarquant que $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$ pour $x \in [0; 1]$.

52)
1. On a $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.
2. On a $u_n = u_0(-1)^n$.

53)
1. On a $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.
2. On étudie les variations de la fonction $g : x \mapsto x(2 - \ln x)$ sur l'intervalle $]0; e]$.
3. On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur l'intervalle $[u_n; e]$.
4. On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction ln sur l'intervalle $[u_n; e]$.