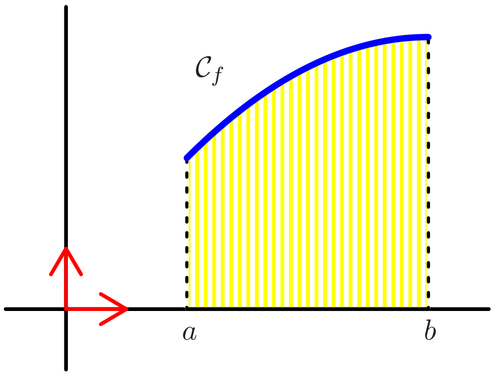
XV. Intégration

1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Définition 1.



Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. Le plan est muni d'un repère orthogonal. L'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine délimité par la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est appelée **intégrale** *de la fonction f entre a et b et est notée :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque 1. $\displaystyle\int_a^b 0\,\mathrm{d}x = 0$ *et* $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Remarque 2. *Une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ est nulle si et seulement si son intégrale entre a et b est nulle.*

Exercice 1. *Calculer $\displaystyle\int_2^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x$ en utilisant la définition de l'intégrale.*

Définition 2. *Pour une fonction f continue négative sur un intervalle $[a;b]$ on appelle intégrale de la fonction f entre a et b l'opposé de l'intégrale de la fonction $-f$ entre a et b. Pour une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$ on appelle intégrale de la fonction f entre a et b la somme des intégrales de la fonction f sur les intervalles où f est de signe constant.*

Exercice 2. *Calculer $\displaystyle\int_{-2}^3 (x-1)\,\mathrm{d}x$ en utilisant la définition de l'intégrale.*

Définition 3. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On appelle* **valeur moyenne** *de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$:*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque 3. *La valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a;b]$ correspond à la valeur d'une fonction contante de même intégrale entre a et b.*

Exercice 3. *Calculer la valeur moyenne de la fonction* sinus *sur l'intervalle $[0;\pi]$.*

Propriété 1. **Croissance de l'intégrale**

On considère deux fonctions f et g continues sur $[a;b]$ avec $f \leqslant g$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Propriété 2. **Inégalité triangulaire**

On considère une fonction f continue sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4. *Interpréter géométriquement l'inégalité triangulaire.*

Propriété 3. **Linéarité de l'intégrale**

On considère $f, g \in \mathcal{C}([a;b], \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

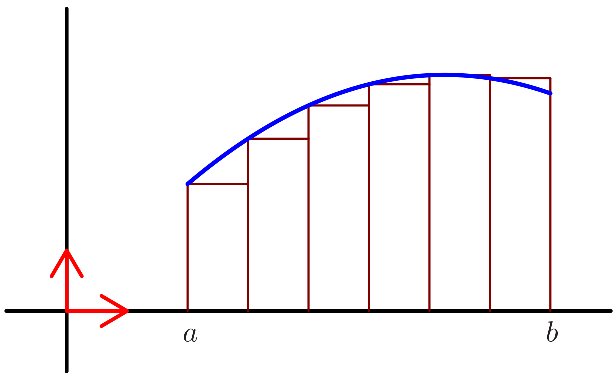
Propriété 4. **Relation de Chasles**

On considère une fonction f continue sur $[a;c]$ et $b \in [a;c]$, alors $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque 4. *On peut utiliser la relation de Chasles pour définir l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ entre b et a par* $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, *les propriétés de l'intégrale vues précédemment demeurent valables à l'exception de celles faisant intervenir l'ordre en particulier l'inégalité triangulaire.*

Propriété 5. **Sommes de Riemann**

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ alors $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Remarque 5. *La propriété demeure valable en considérant la somme* $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.

Exercice 5. *Calculer* $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ *en utilisant les sommes de Riemann.*

Exercice 6. *Montrer que* $\displaystyle\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{k=n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *en approchant l'intégrale de f au moyen de trapèzes.*

2 Calcul intégral

Définition 4. *On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, une fonction $F \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ telle que $F' = f$ est appelée une* **primitive** *de la fonction f sur l'intervalle I.*

Exercice 7. *Montrer que la fonction* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{lll} 1 & si & x = 0 \\ 0 & si & x \neq 0 \end{array}\right. \end{array}$ *n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.*

Propriété 6. *Si F_1 et F_2 sont deux primitives d'une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ alors il existe un réel k tel que $F_2 = F_1 + k$.*

Théorème 1. **Théorème fondamental de l'analyse**

On considère une fonction $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ et $x_0, a, b \in I$:

- *La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I s'annulant en x_0.*
- *Si F est une primitive de f sur I alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a)$.*

Exercice 8. *Calculer l'aire du domaine plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction inverse ainsi que les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.*

Corollaire 1. *Si $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $a, b \in I$ alors $\displaystyle\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.*

Propriété 7. **Intégration par parties**

Si $u, v \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $a, b \in I$ alors $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 9. *Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t \ \mathrm{d}t$ par intégration par parties.*

Exercice 10. *Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ par intégration par parties.*

Propriété 8. **Changement de variable**

Si $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})$ et $\begin{array}{c} a, b \in J \\ \varphi(J) \subset I \end{array}$ alors $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

Remarque 6. *En pratique, on note $x = \varphi(t)$ et $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$.*

Exercice 11. *Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \ \mathrm{d}x$ puis interpréter graphiquement. (on pourra utiliser le changement de variable $x = \cos t$)*

Exercice 12. *Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2(\sin t)^3 \ \mathrm{d}t$. (on pourra utiliser le changement de variable $x = \cos t$)*

Corollaire 2. *On considère $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $a, b \in \mathbb{R}$:*

- *si f est* ***impaire*** *alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0$ et si f est* ***paire*** *alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$.*
- *si f est* ***T-périodique*** *alors $\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.*

Exercice 13. *Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} (\cos t)^3 \ \mathrm{d}t$. (on pourra utiliser le changement de variable $t = \pi - x$)*

3 Développements limités

3.1 Formules de Taylor

Propriété 9. **Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral**
On considère $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ *et* $a, b \in I$ *alors :*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \mathrm{d}t$$

Corollaire 3. **Inégalité de Taylor-Lagrange**
On considère $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ *et* $a, b \in I$ *alors :*

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{\overleftrightarrow{[a;b]}} |f^{(n+1)}|$$

Exercice 14. *Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle pour* $a = 0$ *et* $b = x$*. En déduire* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!}$.

Corollaire 4. **Formule de Taylor-Young**
On considère $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ *et* $a, x \in I$ *alors :*

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Exercice 15. *Appliquer la formule de Taylor-Young à la fonction cosinus en zéro. En déduire* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

En fait, on peut énoncer une version plus forte de la propriété :

Propriété 10. **Formule de Taylor-Young**
On considère $f \in \mathcal{C}^{n}(I, \mathbb{R})$ *et* $a, x \in I$ *alors :*

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Propriété 11. **Développements limités usuels**

$$\begin{aligned}
e^x &\underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\cos x &\underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\sin x &\underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\frac{1}{1-x} &\underset{x \to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
\ln(1+x) &\underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &\underset{x \to 0}{=} 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \\
\arctan x &\underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}$$

3.2 Opérations sur les développements limités

Définition 5. *On dit qu'une fonction f à valeurs réelles définie au voisinage de a admet un* **développement limité** *d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a si $f(x) \underset{a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ avec $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.*

Propriété 12. *Si une fonction f admet un développement limité d'ordre n en a alors celui-ci est unique.*

Exercice 16. *Interpréter en termes de limites les coefficients du développement limité d'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.*

Corollaire 5. *Si une fonction paire admet un développement limité d'ordre n en 0 alors les coefficients des termes de degré impair sont nuls, si une fonction impaire admet un développement limité d'ordre n en 0 alors les coefficients des termes de degré pair sont nuls.*

On peut additionner et multiplier les développements limités :

Exercice 17. *Calculer le développement limité d'ordre 4 en 0 des fonctions $x \mapsto \cos x + \sin x$ et $x \mapsto e^x \sin x$.*

On peut déterminer le développement limité d'une composée :

Exercice 18. *Calculer le développement limité d'ordre 3 en 0 des fonctions $x \mapsto e^{\sin x}$ et $x \mapsto e^{\cos x}$.*

On peut déterminer le développement limité d'un inverse ou d'un quotient en utilisant le développement limité de $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$ en 0 :

Exercice 19. *Déterminer le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$, en déduire le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction tangente.*

Propriété 13. **Développement limité d'une primitive**
On considère une fonction f définie sur un intervalle I et admettant une primitive F sur I telle que $f(x) \underset{a}{=} o((x-a)^n)$ avec $a \in I$ alors $F(x) \underset{a}{=} F(a) + o((x-a)^{n+1})$.

Exercice 20. *Déterminer le développement limité d'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$.*

Exercice 21. *Déterminer le développement limité d'ordre $2n+1$ en 0 de la fonction arctangente.*

Contre-exemple 1. *On considère la fonction* $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array}$.

1. *Montrer que $f(x) \underset{0}{=} o(x^2)$.*
2. *Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.*
3. *Montrer que $f'(x) \underset{0}{\neq} o(x)$.*

Si f est dérivable et admet un développement limité d'ordre n en a on ne peut donc pas affirmer que f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en a, en revanche si on sait que f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en a alors on peut l'obtenir par dérivation du développement limité d'ordre n de f en a d'après la propriété 13.

Exercices supplémentaires

Exercice 22

Calculer l'aire du domaine du plan situé entre les paraboles d'équation $y = x^2$ et $y = 1 - x^2$.

Exercice 23

Calculer la valeur moyenne de la fonction racine carrée sur l'intervalle $[1; 3]$.

Exercice 24 ($\star$)

Calculer la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto (\sin x)^2$ sur l'intervalle $[0; \pi]$.

Exercice 25 ($\star\star$)

On considère une fonction f continue sur l'intervalle $[a; b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.
Montrer que f est de signe constant. (on pourra considérer la fonction $g = |f| \pm f$)

Exercice 26 ($\star\star$)

On considère une fonction f continue sur l'intervalle $[a; b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Montrer que f s'annule sur $]a; b[$. (on pourra appliquer le théorème de Rolle)

Exercice 27

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{n+k}$ en étudiant les sommes de Riemann de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

Exercice 28

Montrer que $F : x \mapsto \ln|1 + x|$ est une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$.

Exercice 29

Déterminer une primitive sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ de la fonction tangente.

Exercice 30

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto e^x \sin x$.
(on pourra la chercher sous la forme $F : x \mapsto (\lambda \sin x + \mu \cos x)e^x$)

Exercice 31 ($\star$)

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto e^x(\sin x)^2$.
(on pourra linéariser)

Exercice 32

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1+x}{1+x^2}$.

Exercice 33 ($\star$)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1+x+x^2}{1+x+x^2+x^3}$, montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que $f(x) = \dfrac{ax+b}{1+x^2} + \dfrac{c}{1+x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire une primitive de f sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$.

Exercice 34

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\tan t)^2 \, \mathrm{d}t$.

Exercice 35

Calculer $\displaystyle\int_0^{3} |t^2 - 3t + 2| \, \mathrm{d}t$.

Exercice 36

Calculer $\displaystyle\int_0^{1} (1+t)\sqrt{t} \, \mathrm{d}t$.

Exercice 37 ($\star\star$)

Montrer que la fonction $\phi : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ est définie et dérivable sur $]0; 1[$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 38

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{(\cos t)^2} \, \mathrm{d}t$. (on pourra effectuer une intégration par parties)

Exercice 39

Calculer $\displaystyle\int_0^{1} t^3 e^{t^2} \, \mathrm{d}t$. (on pourra effectuer une intégration par parties)

Exercice 40

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction arctangente. (on pourra effectuer une intégration par parties)

Exercice 41 ($\star$)

Calculer $\displaystyle\int_1^{e} t(\ln t)^4 \, \mathrm{d}t$. (on pourra effectuer des intégrations par parties successives)

Exercice 42

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2 (\cos t)^3 \, \mathrm{d}t$. (on pourra utiliser le changement de variable $x = \sin t$)

Exercice 43 ($\star$)

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t}$. (on pourra utiliser le changement de variable $x = \tan \frac{t}{2}$)

Exercice 44 ($\star$)

Exprimer $1 + \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$ en fonction de $\tan x$ et en déduire $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\ \mathrm{d}t$.
(on pourra utiliser un changement de variable)

Exercice 45 ($\star$)

On considère $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ T-périodique avec $a \in \mathbb{R}$, montrer que $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.
(on pourra utiliser la relation de Chasles)

Exercice 46 ($\star$)

On considère une fonction f polynomiale de degré inférieur ou égal à 3.
Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$.

Exercice 47 ($\star\star$)

On considère une fonction f polynomiale de degré inférieur ou égal à 3.
Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\left(f\left(\tfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}a + \tfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}b\right) + f\left(\tfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}a + \tfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}b\right)\right)$.

Exercice 48 ($\star$)

Démontrer que $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ en utilisant la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral à l'ordre 2 pour $f(t) = \ln(1+t)$, $a = 0$ et $b = x$.

Exercice 49 ($\star$)

Déterminer le développement limité à l'ordre n en $x = 0$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ en utilisant la formule de Taylor-Young.

Exercice 50

Déterminer un équivalent en 0 de la fonction $f : x \mapsto x(2+\cos x) - 3\sin x$.

Exercice 51

Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 6 de $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.

Exercice 52

Étudier la limite en 0 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{1-\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 53

Déterminer le développement limité à l'ordre n en $x = -1$ de $x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3$.
(on pourra utiliser le changement de variable $X = x + 1$)

Exercice 54

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en $x = 1$ de $x \mapsto \dfrac{1 + x^3}{1 + x + x^2}$.
(on pourra utiliser le changement de variable $X = x - 1$)

Exercice 55

Étudier la limite en 1 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{1 - \sqrt{x}}$.
(on pourra utiliser le changement de variable $X = x - 1$)

Exercice 56 ($\star$)

Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ admet une asymptote oblique $\mathcal{T}$ en $+\infty$ puis étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ au voisinage de $+\infty$.
(on pourra utiliser le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$ et calculer un développement limité)

Exercice 57

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$ se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable en 0 et déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.

Exercice 58

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en $x = 0$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1 + \sin x}$.

Exercice 59

Déterminer une valeur approchée de $\arctan \dfrac{1}{10}$ en utilisant le développement limité de la fonction arctan en 0 à l'ordre 4.

Exercice 60

Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de la fonction arccos en 0.
(on pourra procéder par intégration)

Exercice 61 ($\star\star$)

Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(16 - x^2)(25 - x^2)}}$.

En déduire une valeur approchée rationnelle de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(16 - t^2)(25 - t^2)}}$.

Réponses

1) On calcule l'aire d'un trapèze, on obtient 6.

2) On calcule l'aire de deux triangles, on obtient $= 2 - \frac{9}{2} = -\frac{5}{2}$.

3) $\dfrac{2}{\pi}$.

4) En termes d'aires, on a $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$.

5) $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = \dfrac{1}{3}$.

6) On pose $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ et on part de $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{b-a}{2n} \left[f(x_k) + f(x_{k+1})\right]$.

7) On aurait $F(x) = C_1$ si $x < 0$ et $F(x) = C_2$ si $x > 0$, et comme F doit être dérivable donc continue, nécessairement $F = Cte$ d'où $f = 0$ ce qui est contradictoire.

8) $\ln 2$.

9) 1.

10) $x \mapsto (x-1)e^x$.

11) $\dfrac{\pi}{2}$ ce qui correspond à l'aire d'un demi-disque de rayon 1.

12) $\dfrac{2}{15}$.

13) 0.

14) e.

15) $\frac{1}{2}$.

16) $c_0 = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $c_1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-c_0}{x}$, $c_1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-c_0-c_1 x}{x^2}$, etc, d'où $c_k = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1-x} = 1$.

17) $\cos x + \sin x \underset{0}{=} 1 + x - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{24}x^4 + o(x^4)$ et $e^x \sin x \underset{0}{=} x + x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^4)$.

18) $e^{\sin x} \underset{0}{=} 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ et $e^{\cos x} \underset{0}{=} e - \dfrac{e}{2}x^2 + o(x^3)$.

19) $\dfrac{1}{\cos x} \underset{0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4 + o(x^5)$ et $\tan x \underset{0}{=} x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

20) $\ln(1-x) \underset{0}{=} -x - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3 - \cdots - \dfrac{1}{n}x^n + o(x^n)$.

21) $\arctan x \underset{0}{=} x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{7}x^7 + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$.

22) $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\frac{\sqrt{2}}{2}} 1 - x^2 \,\mathrm{d}x - \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

23) $\sqrt{3} - \dfrac{1}{3}$.

24) $\dfrac{1}{2}$.

25) Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ alors la fonction $g = |f| - f$ positive est d'intégrale nulle donc nulle et $f = |f| \geqslant 0$, si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$ alors la fonction $g = |f| + f$ positive est d'intégrale nulle donc nulle et $f = -|f| \leqslant 0$.

26) On applique le théorème de Rolle à la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ sur l'intervalle $[a;b]$.

27) $\ln 2$.

28) Si $x < -1$ alors $F(x) = \ln(-1-x)$ d'où $F'(x) = \dfrac{-1}{-1-x} = f(x)$.

29) $x \mapsto -\ln(\cos x)$.

30) $F(x) = \dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x$.

31) $F(x) = \dfrac{1}{10}(5 - \cos 2x - 2\sin 2x)e^x$.

32) $F(x) = \arctan x + \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

33) $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln(1+x^2) + \dfrac{1}{2}\arctan x + \dfrac{1}{2}\ln|1+x|$.

34) $\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$.

35) $\dfrac{11}{6}$.

36) $\dfrac{16}{15}$.

37) On a $\phi(x) = F(x^2) - F(x)$ avec F primitive de $\dfrac{1}{\ln}$ d'où $\phi'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$.

38) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2$.

39) $\dfrac{1}{2}$, en remarquant que $t^3e^{t^2} = \dfrac{1}{2}t^2 \times 2te^{t^2}$.

40) $x \mapsto x\ \arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

41) $\dfrac{e^2-3}{4}$ en remarquant que $I_n = \int_1^e t(\ln t)^n\ dt$ vérifie la relation de récurrence $I_n = \dfrac{1}{2}(e^2 - nI_{n-1})$.

42) $\dfrac{2}{15}$.

43) 1.

44) En posant $x = \frac{\pi}{4} - t$ on obtient $I = \dfrac{1}{4}\pi\ln 2 - I$ d'où $I = \dfrac{1}{8}\pi\ln 2$.

45) $\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\mathrm{d}t + \int_T^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.

46) On prouve la formule pour $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ et $f(x) = x^3$ puis on procède par linéarité de l'intégrale.

47) On prouve la formule pour $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ et $f(x) = x^3$ puis on procède par linéarité de l'intégrale.

48) On remarque que $\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} = \int_0^x \dfrac{(x-t)^2}{2}\ln^{(3)}(1+t)\ dt \geqslant 0$ et que $\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} = \int_0^x \dfrac{(x-t)^3}{6}\ln^{(4)}(1+t)\ dt \leqslant 0$.

49) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \underset{0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2k-1)}{k!\ 2^k}x^k\ + o(x^n)$.

50) $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^5}{60}$.

51) $1 + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{8}x^4 + \dfrac{1}{16}x^6 + o(x^6)$.

52) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -1$.

53) $2(x+1) - 2(x+1)^2 + (x+1)^3$ si $n \geqslant 3$.

54) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}(x-1) + \dfrac{4}{9}(x-1)^2 - \dfrac{2}{9}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.

55) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = -2$.

56) On montre que $f(x) = \dfrac{1}{X} + 1 + \dfrac{1}{2}X + o(X) = x + 1 + \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

57) $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} \underset{0}{=} \dfrac{1}{6}x + o(x)$ donc $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{1}{6}$.

58) $\sqrt{1 + \sin x} \underset{0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{1}{48}x^3 + o(x^3)$.

59) $\arctan\dfrac{1}{10} \simeq \dfrac{299}{3000}$.

60) $\arccos x \underset{0}{=} \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3x^5}{40} + o(x^6)$.

61) $f(x) \underset{0}{=} \dfrac{1}{20} + \dfrac{41}{16000}x^2 + o(x^3)$ d'où $F(1) - F(0) \simeq \dfrac{2441}{48000}$.