II. Nombres complexes

1 Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

Théorème 1. *Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ des* **nombres complexes** *qui possède les propriétés suivantes :*

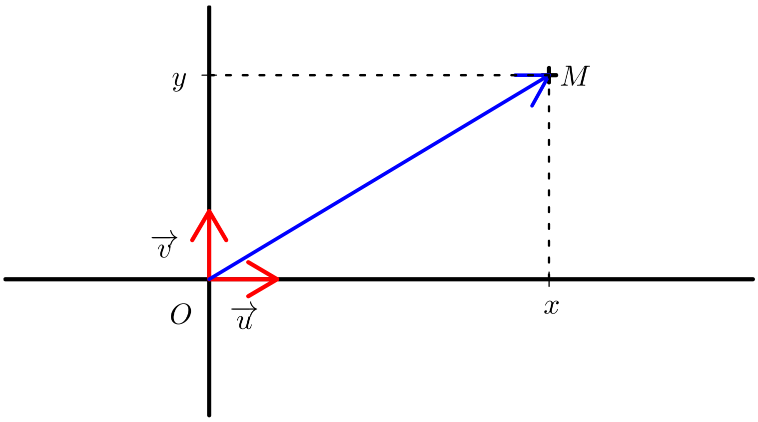
- *$\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.*
- *$\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.*
- *$\mathbb{C}$ contient un nombre noté i tel que $i^2 = -1$.*
- *tout nombre complexe z admet une unique écriture sous la forme $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, cette écriture est appelée* **forme algébrique** *du nombre z, le réel x est la* **partie réelle** *du nombre z notée $\mathcal{R}e(z)$ et le réel y est la* **partie imaginaire** *du nombre z notée $\mathcal{I}m(z)$. Si $y = 0$ le nombre z est dit* **réel** *et si $x = 0$ le nombre z est dit* **imaginaire pur***.*

Exercice 1. *Calculer la forme algébrique du nombre complexe $z = 3 - (2 + i)(1 - 3i)$.*

Définition 1. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ on représente le nombre complexe $z = x + iy$ par :*

- *Le point $M(x; y)$.*
- *Le vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$*

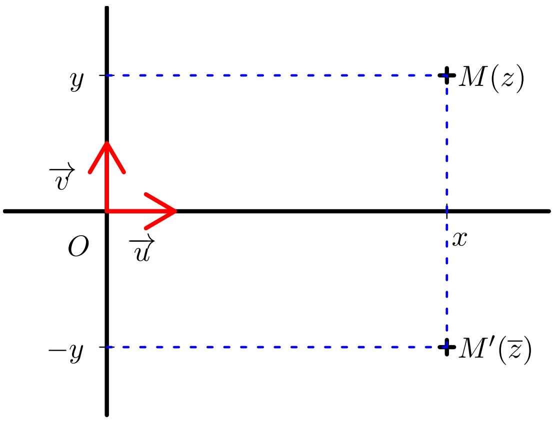
Le plan est alors appelé **plan complexe***, l'axe des abscisses est appelé* **axe des réels** *et l'axe des ordonnées* **axe des imaginaires purs***, le nombre complexe z est appelé* **affixe** *du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.*



Exercice 2. *Représenter dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = -1 - 4i$, $z_C = -3i$ et $z_D = -7$. Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.*

Définition 2. *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $x, y \in \mathbb{R}$, on appelle* **nombre complexe conjugué** *de z le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$.*

Propriété 1. *Soit z un nombre complexe, les points M et M' du plan complexe d'affixes respectives z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.*



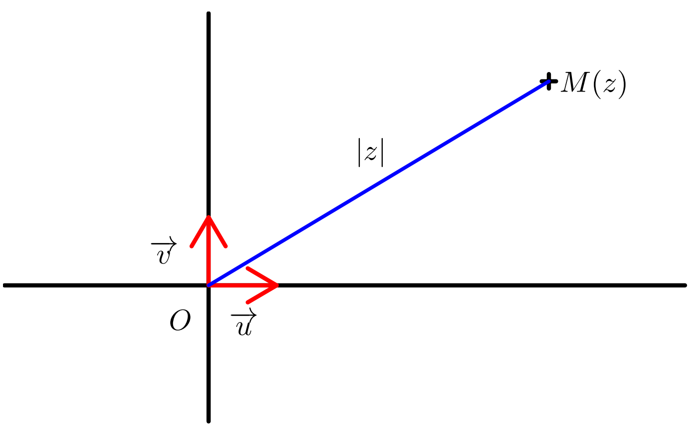
Exercice 3. *Calculer la forme algébrique du nombre complexe $z = \dfrac{3-i}{1+2i}$. (on pourra multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur)*

Propriété 2. *Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a :*

- $\boxed{\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}}$
- $\boxed{\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}}$
- $\boxed{\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}}$
- *pour* $z_2 \neq 0$, $\boxed{\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}}$

Définition 3. *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, on appelle* **module** *de z le nombre réel $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Propriété 3. *Soit z un nombre complexe et M son point image dans le plan complexe alors $OM = |z|$.*



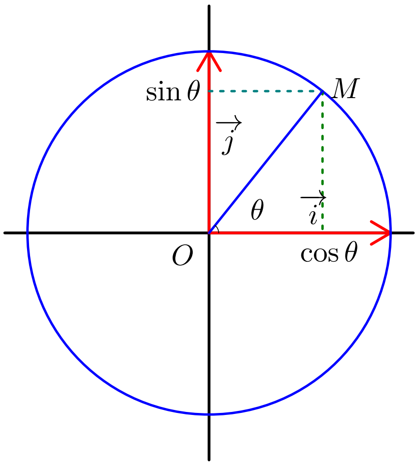
Exercice 4. *Dans le plan complexe, on considère deux points A et B d'affixes respectives z_A et z_B. Interpréter géométriquement $|z_B - z_A|$.*

Propriété 4. *Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a :*

- $\boxed{z\overline{z} = |z|^2}$
- $\boxed{|\overline{z}| = |z|}$
- $\boxed{|-z| = |z|}$
- $\boxed{|z| = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad z = 0}$
- $\boxed{|z_1 z_2| = |z_1||z_2|}$
- *pour* $z \neq 0$, $\boxed{\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}}$
- *pour* $z_2 \neq 0$, $\boxed{\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}}$
- $\boxed{|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|}$ *(inégalité triangulaire)*

2 Écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul

2.1 Trigonométrie



Définition 4. *Le plan étant muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère un point M du cercle de centre O et de rayon 1 et on note $\theta = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$. La fonction de $\mathbb{R}$ dans $[-1;1]$ qui à θ associe l'abscisse du point M est appelée fonction* **cosinus** *et est notée* **cos** *et la fonction de $\mathbb{R}$ dans $[-1;1]$ qui à θ associe l'ordonnée du point M est appelée fonction* **sinus** *et est notée* **sin**.

Propriété 5.

- *Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques :*

$$\text{pour tout } \theta \in \mathbb{R}, \text{ on a } \boxed{\begin{array}{rcl} \cos(\theta + 2\pi) & = & \cos(\theta) \\ \sin(\theta + 2\pi) & = & \sin(\theta) \end{array}}$$

- *La fonction cosinus est* **paire** *et la fonction sinus est* **impaire** *:*

$$\text{pour tout } \theta \in \mathbb{R}, \text{ on a } \boxed{\begin{array}{rcl} \cos(-\theta) & = & \cos(\theta) \\ \sin(-\theta) & = & -\sin(\theta) \end{array}}$$

Propriété 6. *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a* $\boxed{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1}$.

Exercice 5. *Exprimer $\cos(\theta + \pi)$, $\sin(\theta + \pi)$, $\cos(\theta + \frac{\pi}{2})$, $\sin(\theta + \frac{\pi}{2})$, $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en utilisant des symétries sur le cercle trigonométrique.*

Propriété 7. **Valeurs remarquables du cosinus et du sinus**

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Propriété 8. *Soient a et b des nombres réels, alors :*

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b} \qquad \boxed{\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b}$$

Corollaire 1. *Soit θ un nombre réel, alors :*

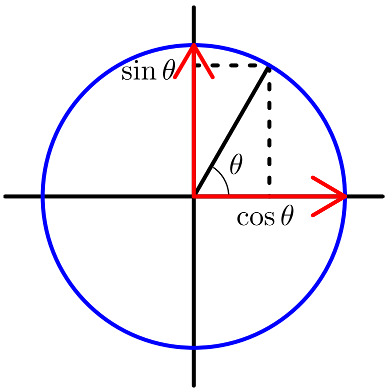
$$\boxed{\cos(2\theta) = (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 = 2(\cos\theta)^2 - 1 = 1 - 2(\sin\theta)^2} \qquad \boxed{\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta}$$

Exercice 6. *Exprimer $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$ et $\sin b$.*

Exercice 7. *Factoriser $\cos p + \cos q$ en posant $p = a+b$ et $q = a-b$.*

2.2 Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

Propriété 9. *Tout nombre complexe de module 1 peut s'écrire sous la forme $\cos\theta + i\sin\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, θ étant défini de manière unique à 2π près.*



Propriété 10. *On note $z_\theta = \cos\theta + i\sin\theta$ pour $\theta\in\mathbb{R}$, alors $\overline{z_\theta} = z_{-\theta} = \dfrac{1}{z_\theta}$ et pour tous α et β appartenant à $\mathbb{R}$ on a $z_\alpha z_\beta = z_{\alpha+\beta}$.*

Définition 5. *Par analogie avec l'exponentielle réelle, on note désormais $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$ pour $\theta\in\mathbb{R}$.*

Exercice 8. *Calculer $e^{i\pi}$ (formule d'Euler), calculer $e^{in\pi}$ pour $n\in\mathbb{Z}$.*

Propriété 11. *Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$, alors :*

- $\boxed{\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}}$ $\boxed{\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$ *(formules d'Euler)*
- $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$ *(formule de Moivre)*

Exercice 9. *Montrer en utilisant les formules d'Euler que $(\cos\theta)^2 = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$.*

Exercice 10. *Montrer en utilisant la formule de Moivre pour $n=2$ que $\cos(2\theta) = (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2$.*

Propriété 12. *formulaire de trigonométrie*

- $\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$
  $\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$
  (ces formules se retrouvent à partir de l'égalité $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$)

- $\boxed{\cos(2\theta) = (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 = 2(\cos\theta)^2 - 1 = 1 - 2(\sin\theta)^2}$
  $\boxed{\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta}$
  (ces formules se retrouvent à partir de l'égalité $\left(e^{i\theta}\right)^2 = e^{2i\theta}$)

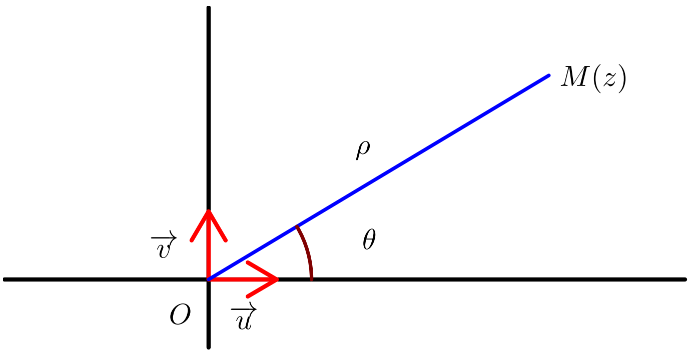
2.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Propriété 13. *Tout nombre complexe $z = x + iy$ non nul peut s'écrire de manière unique sous la* **forme trigonométrique** *$z = \rho e^{i\theta}$ avec ρ un réel strictement positif et θ un réel défini à 2π près. De plus on a :*

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Le réel θ est appelé **argument** *du nombre complexe z et noté $\arg(z)$.*

Propriété 14. *Soit $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ un nombre complexe et M son point image dans le plan complexe alors le couple (ρ, θ) représente les coordonnées polaires du point M.*



Exercice 11. *On considère le nombre complexe $z = 1 + i$. Écrire z sous forme trigonométrique, en déduire la forme algébrique de z^{100}.*

Exercice 12. *On considère les nombres complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$. Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique, en déduire les modules et arguments de $z_1 \times z_2$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$.*

Propriété 15. *Soient z, z_1 et z_2 trois nombres complexes non nuls, alors :*

- $\boxed{\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]}$
- $\boxed{\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]}$
- $\boxed{\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]}$
- $\boxed{\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]}$
- $\boxed{\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi]}$
- $\boxed{\arg(z^n) = n \times \arg(z)\ [2\pi] \quad , \quad n \in \mathbb{Z}}$

2.4 Racines n-ièmes de l'unité

Propriété 16. *L'équation $z^n = 1$ avec $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ admet n solutions appelées* **racines n-ièmes de l'unité** *et s'exprimant sous la forme $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$.*

Remarque 1. *On note $\mathbb{U}_n = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.*

Exercice 13. *Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de l'unité et les représenter dans le plan complexe.*

Exercice 14. *Déterminer sous forme algébrique les racines cubiques de l'unité et les représenter dans le plan complexe.*

Exercice 15. *Déterminer sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité et les représenter dans le plan complexe.*

Propriété 17. *L'équation $z^n = re^{i\alpha}$ avec $z \in \mathbb{C}$, $r \in]0; +\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ admet n solutions s'exprimant sous la forme $z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$.*

Remarque 2. *Pour $r = 1$ et $\alpha = 0$, on obtient les formules des racines n-ièmes de l'unité.*

Exercice 16. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 8i$.*

Exercice 17. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -16$.*

2.5 Exponentielle complexe

Définition 6. *On appelle* **exponentielle complexe** *d'un nombre complexe $z = x+iy$ avec x et y réels : $e^z = e^x e^{iy}$.*

Remarque 3. *Cette définition est compatible avec l'exponentielle d'un réel et l'exponentielle d'un nombre imaginaire pur et conserve de nombreuses propriétés.*

Exercice 18. *Déterminer la forme algébrique de $e^{i-\sqrt{3}}$.*

Propriété 18. *Soit z, z_1 et z_2 des nombres complexes et n un entier relatif, alors :*

- $\boxed{e^z \neq 0}$
- $\boxed{e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}}$
- $\boxed{e^{\overline{z}} = \overline{e^z}}$
- $\boxed{e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}}$
- $\boxed{e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}}$
- $\boxed{(e^z)^n = e^{nz}}$

3 Équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

3.1 Racines carrées d'un nombre complexe non nul

Définition 7. *On appelle* **racine carrée** *d'un nombre complexe Z, un nombre complexe z dont le carré est égal à Z.*

Remarque 4. *Dans le cas où le nombre est réel, cette définition est incompatible avec celle de la fonction racine carrée.*

Propriété 19. *Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.*

Propriété 20. *Les racines carrées d'un nombre complexe $Z = a + ib$ sont les nombres $z = x + iy$ avec x et y solutions du système :*

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{R}e(z^2) & = & \mathcal{R}e(Z) \\ \mathcal{I}m(z^2) & = & \mathcal{I}m(Z) \\ |z^2| & = & |Z| \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - y^2 & = & a \\ 2xy & = & b \\ x^2 + y^2 & = & \sqrt{a^2 + b^2} \end{array} \right.$$

Exercice 19. *Déterminer les racines carrées du nombre complexe $5 + 12i$.*

3.2 Résolution des équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

Théorème 2. *Étant donnés trois nombres complexes a, b, c avec $a \neq 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ admet :*

- *Si $\Delta = 0$, une solution complexe $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$ de plus $az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$.*
- *Si $\Delta \neq 0$, deux solutions complexes $z_1 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$ avec $\delta^2 = \Delta$ de plus $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.*

Exercice 20. *On considère l'équation du second degré $z^2 + (1 + 6i)z - 10 = 0$.*

Déterminer le discriminant Δ de cette équation puis calculer ses racines carrées complexes δ_1 et δ_2, en déduire les solutions de l'équation $z^2 + (1 + 6i)z - 10 = 0$.

Corollaire 2. *L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b, c trois réels et $a \neq 0$ admet pour $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ deux racines complexes distinctes conjuguées $x_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ de plus $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$*

Exercice 21. *Déterminer les solutions de l'équation $x^2 - 2x + 5 = 0$.*

Exercices supplémentaires

Exercice 22

Calculer la forme algébrique du nombre complexe $z = (1-i)(1-2i)(1-3i)$.

Exercice 23 ($\star\star$)

Calculer la forme algébrique du nombre complexe $z = (1+i)(1+2i)^2(1+3i)^3$.

Exercice 24

Dans le plan complexe, on considère un point M quelconque d'affixe z. Exprimer en fonction de $\overline{z}$, l'affixe du symétrique M' du point M par rapport à l'axe des imaginaires purs.

Exercice 25 ($\star$)

Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points d'affixe z vérifiant $(2+i)z + (2-i)\overline{z} = 2$.

Exercice 26

Calculer la forme algébrique du nombre complexe $z = \dfrac{1}{1-i} + \dfrac{2}{1-2i} + \dfrac{3}{1-3i}$.

Exercice 27 ($\star$)

Calculer la forme algébrique du nombre complexe $z = 1 + \dfrac{i}{2+\dfrac{i}{3}}$.

Exercice 28

Calculer le module du nombre complexe $z = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 29 ($\star$)

Dans le plan complexe, déterminer graphiquement l'ensemble des points d'affixe z vérifiant $|1+i+z| = 2$.

Exercice 30 ($\star\star$)

Simplifier $|z+1|^2 + |z-1|^2$ pour z un nombre complexe de module 1.

Exercice 31

Simplifier $\cos(\theta + 5\pi)$, $\cos\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right)$, $\sin(3\pi - \theta)$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{2} + \theta\right)$ en utilisant les symétries du cercle trigonométrique.

Exercice 32

Déterminer les mesures principales [1] associées aux mesures $\dfrac{15\pi}{2}$, $\dfrac{34\pi}{7}$ et $-\dfrac{65\pi}{3}$.

Exercice 33

Déterminer les valeurs exactes des cosinus et sinus des réels $-\dfrac{5\pi}{3}$, $\dfrac{7\pi}{4}$ et $\dfrac{19\pi}{6}$.

1. mesures dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Exercice 34 ($\star$)

Résoudre l'équation $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ et l'inéquation $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 35 ($\star$)

Factoriser $\sin p + \sin q$ pour $p, q \in \mathbb{R}$.

Exercice 36 ($\star$)

Simplifier $\dfrac{\sin(3x)}{\sin x} - \dfrac{\cos(3x)}{\cos x}$ pour $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 37

Linéariser $(\cos\theta)^3$ puis $(\sin\theta)^3$ en utilisant les relations d'Euler.

Exercice 38

Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ en utilisant la formule de Moivre pour $n = 3$.

Exercice 39 ($\star$)

Linéariser $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$ en utilisant les relations d'Euler.

Exercice 40 ($\star$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x + \cos(2x) = 0$.

Exercice 41 ($\star$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x + \sqrt{3}\sin x = -2$.

Exercice 42 ($\star\star$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\cos x + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) > 0$.

Exercice 43 ($\star\star\star$)

Factoriser $\cos\left(x - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{1}{2}\right)$, en déduire la valeur de la somme $S = \sin 1 + \sin 2 + \sin 3 + \cdots + \sin n$.

Exercice 44

Déterminer l'argument des nombres complexes 1, i, -1 et $-i$.

Exercice 45

Déterminer la forme trigonométrique de $1 - i\sqrt{3}$, en déduire la forme algébrique de $(1 - i\sqrt{3})^5$.

Exercice 46 ($\star\star$)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \overline{z}$.

Exercice 47

Déterminer sous forme algébrique les racines sixièmes de l'unité et les représenter dans le plan complexe.

Exercice 48

Déterminer sous forme algébrique les racines huitièmes de l'unité et les représenter dans le plan complexe.

Exercice 49

Déterminer sous forme trigonométrique les racines cinquièmes de l'unité et les représenter dans le plan complexe.

Exercice 50

Calculer dans $\mathbb{C}$ les racines cubiques de i.

Exercice 51

Calculer dans $\mathbb{C}$ les racines cubiques de -8.

Exercice 52 ($\star$)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = i - 1$.

Exercice 53

Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $3 - 4i$.

Exercice 54 ($\star$)

Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $\dfrac{21}{4} - 5i$.

Exercice 55

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+i)z + 5i = 0$.

Exercice 56

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 1 = i(7 - 3z)$.

Exercice 57 ($\star$)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos\theta\ z + 1 = 0$ pour θ un réel quelconque.

Exercice 58 ($\star\star$)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 8iz^2 - 25 = 0$.

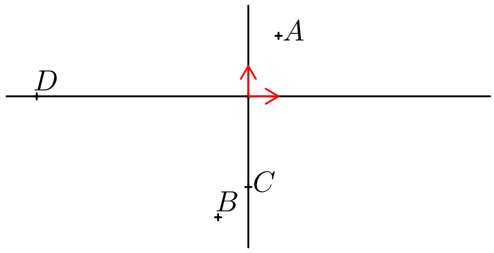
Exercice 59 ($\star\star\star$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$ en posant $x = u + v$ avec u et v des nombres complexes tels que $uv = 5$.

Réponses

1) $z = -2 + 5i$.

2) $z_{\overrightarrow{AB}} = -2 - 6i$.



3) $z = \dfrac{(3-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{5}i$.

4) $|z_B - z_A| = AB$.

5) $\cos(x+\pi) = -\cos x$, $\sin(x+\pi) = -\sin x$, $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$, $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x$ et $\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x$.

6) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ et $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

7) $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$.

8) $e^{i\pi} = -1$ et $e^{in\pi} = (-1)^n$.

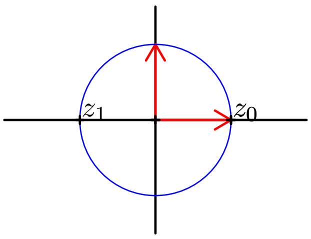
9) $(\cos\theta)^2 = \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}+2}{4} = \dfrac{\cos(2\theta)+1}{2}$.

10) $\cos(2x) = \mathcal{R}e\left((e^{ix})^2\right) = \mathcal{R}e\left((\cos x + i\sin x)^2\right) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$.

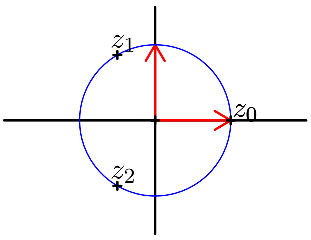
11) $z^{100} = (1+i)^{100} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{100} = 2^{50}e^{i25\pi} = -2^{50}$.

12) $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ et $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$.

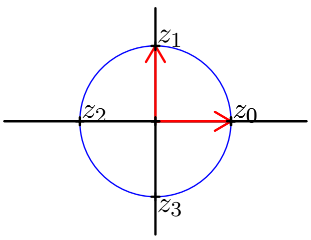
13) $z_0 = 1$ et $z_1 = -1$.



14) $z_0 = 1$, $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.



15) $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$ et $z_3 = -i$.



16) $\left\{\sqrt{3}+i,-\sqrt{3}+i,-2i\right\}$.

17) $\left\{\sqrt{2}+i\sqrt{2},-\sqrt{2}+i\sqrt{2},-\sqrt{2}-i\sqrt{2},\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right\}$.

18) $e^{i-\sqrt{3}}=e^{i}e^{-\sqrt{3}}=e^{-\sqrt{3}}\cos 1+ie^{-\sqrt{3}}\sin 1$.

19) $\{3+2i,-3-2i\}$.

20) $\Delta=5+12i$, $\delta_1=3+2i$, $\delta_2=-3-2i$, $z_1=1-2i$ et $z_2=-2-4i$.

21) $\{1+2i,1-2i\}$.

22) $z=-10$.

23) $z=200+100i$.

24) $z_{M'}=-\overline{z}$.

25) Droite d'équation réduite $y=2x-1$.

26) $z=\dfrac{6}{5}+\dfrac{11}{5}i$.

27) $z=\dfrac{40}{37}+\dfrac{18}{37}i$.

28) $|z|=1$.

29) Cercle de centre d'affixe $-1-i$ et de rayon 2.

30) $|z+1|^2+|z-1|^2=4$ si $z\overline{z}=1$.

31) $\cos(\theta+5\pi)=-\cos\theta$, $\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\theta$, $\sin(3\pi-\theta)=\sin\theta$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$.

32) $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{6\pi}{7}$ et $\frac{\pi}{3}$.

33) $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\frac{19\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{19\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.

34) Les ensembles de solutions sont $\{\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\}$ et $]-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}[$.

35) $\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$.

36) $\dfrac{\sin(3x)}{\sin x}-\dfrac{\cos(3x)}{\cos x}=2$.

37) $(\cos x)^3=\dfrac{3\cos x+\cos(3x)}{4}$ et $(\sin x)^3=\dfrac{3\sin x-\sin(3x)}{4}$.

38) $\cos(3\theta)=4(\cos\theta)^3-3\cos\theta$.

39) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)=\dfrac{1+2\cos(2x)}{4}$.

40) $\cos x+\cos 2x=2(\cos x)^2+\cos x-1$ d'où $x=\pi[2\pi]$ ou $x=\pm\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

41) $\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ d'où $x=-\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$.

42) $\cos x+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ d'où $-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi<x<\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

43) $S=\frac{\cos\frac{1}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}$.

44) $0+2k\pi$, $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $-\pi+2k\pi$ et $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

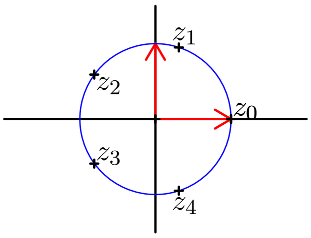
45) $1-i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ d'où $(1-i\sqrt{3})^5=16(1+i\sqrt{3})$.

46) 0, i, -1, $-i$ et 1 en utilisant l'écriture trigonométrique.

47) $z_0=1$, $z_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3=-1$, $z_4=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_5=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

48) $z_0=1$, $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2=i$, $z_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_4=-1$, $z_5=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_6=-i$ et $z_7=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

49) $z_0 = 1$, $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $z_3 = e^{i\frac{6\pi}{5}}$ et $z_4 = e^{i\frac{8\pi}{5}}$.



50) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $-i$.

51) -2, $1 + i\sqrt{3}$ et $1 - i\sqrt{3}$.

52) $z = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

53) $2 - i$ et $-2 + i$.

54) $\frac{5}{2} - i$ et $-\frac{5}{2} + i$.

55) $2 - i$ et $-1 + 2i$.

56) $3 - i$ et $1 - 2i$.

57) $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

58) $-1 + 2i$, $1 - 2i$, $-2 + i$ et $2 - i$.

59) Les solutions sont 4, $-2 + \sqrt{3}$ et $-2 - \sqrt{3}$ en remarquant que u^3 est solution de l'équation $z^2 - 4z + 125 = 0$ d'où $u^3 = 2 \pm 11i$ soit $u = (2 \pm i)e^{i(0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})}$.