III. Fonctions

1 Généralités sur les fonctions

Définition 1. *Une fonction f à valeurs réelles définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ fait correspondre à tout $x \in I$ un unique réel $f(x)$ appelé* **image** *de x par la fonction f.*

On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Définition 2. *On appelle* **représentation graphique** *d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x; f(x))$ pour $x \in \mathbb{R}$.*

Exercice 1. *Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto (x-3)^2 + 1$.*

Exercice 2. *Expliquer comment obtenir les représentations graphiques des fonctions $f_1 : x \mapsto f(x) + a$, $f_2 : x \mapsto f(x+a)$, $f_3 : x \mapsto af(x)$ et $f_4 : x \mapsto f(ax)$ à partir de la représentation graphique de f pour $a \in \mathbb{R}$. Illustrer en considérant $f : x \mapsto (x-1)^2 + 1$ et $a = 2$.*

Définition 3. *Une fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dite :*
- **paire** *si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
- **impaire** *si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
- **périodique** *si il existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Exercice 3. *Déterminer la parité des fonctions puissances $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 4. *Interpréter géométriquement la parité et la périodicité d'une fonction f.*

Exercice 5. *On considère la fonction $f : x \mapsto \cos(3x)$. Étudier la parité et la périodicité de la fonction f.*

Définition 4. *Une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est dite :*
- **constante** *sur I si pour tous $x, y \in I$ on a $f(x) = f(y)$.*
- **croissante** *(strictement croissante) sur I si pour tous $x, y \in I$ avec $x \leqslant y$ on a $f(x) \leqslant f(y)$ (avec $x < y$ on a $f(x) < f(y)$).*
- **décroissante** *(strictement décroissante) sur I si pour tous $x, y \in I$ avec $x \leqslant y$ on a $f(x) \geqslant f(y)$ (avec $x < y$ on a $f(x) > f(y)$).*
- **monotone** *sur I si elle est croissante ou décroissante sur I .*

Exercice 6. *Montrer que la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty; 0]$ sans utiliser la dérivation.*

Exercice 7. *On considère $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que $x \leqslant y \iff e^x \leqslant e^y$.*

Définition 5. *Une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est dite :*
- **majorée** *sur I si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in I$, M est alors appelé* **majorant** *de la fonction f sur I.*
- **minorée** *sur I si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geqslant m$ pour tout $x \in I$, m est alors appelé* **minorant** *de la fonction f sur I.*
- **bornée** *si elle est à la fois majorée et minorée.*

Exemple 1. *Les fonctions* cos *et* sin *sont bornées sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 8. *Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.*

Définition 6. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admet :*

- *un* **maximum** *sur I si il existe $a \in I$ tel que $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in I$, $f(a)$ est alors appelé maximum de la fonction f sur I.*
- *un* **minimum** *sur I si il existe $a \in I$ tel que $f(x) \geqslant f(a)$ pour tout $x \in I$, $f(a)$ est alors appelé minimum de la fonction f sur I.*
- *un* **extremum** *sur I si elle admet un maximum ou un minimum sur I.*

Exemple 2. *Les fonctions* $\cos$ *et* $\sin$ *admettent -1 et 1 comme minimum et maximum sur $\mathbb{R}$.*

Remarque 1. *Une fonction admettant un maximum est majorée et une fonction admettant un minimum est minorée.*

Exercice 9. *La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}$ admet-elle un minimum et un maximum sur $\mathbb{R}$?*

Définition 7. *On considère deux fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ainsi que $k \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions :*

$$\begin{array}{ccccc} ku & : & x & \mapsto & ku(x) \\ u+v & : & x & \mapsto & u(x)+v(x) \\ uv & : & x & \mapsto & u(x)v(x) \\ v \circ u & : & x & \mapsto & v(u(x)) \end{array}$$

Exercice 10. *Exprimer à partir des fonctions $f : x \mapsto 1$, $g : x \mapsto x^2$ et $h : x \mapsto \sin(x)$ les fonctions $x \mapsto 1 + x^2\sin(x)$, $x \mapsto \sin(x^2+2)$ et $x \mapsto (2\sin(x)-1)^2$.*

Définition 8. *Une fonction $f : I \to J$ admet une* **fonction réciproque** *$g : J \to I$ si tout élément $y \in J$ admet un unique antécédent $x \in I$ par la fonction f et on note alors $g(y) = x$.*

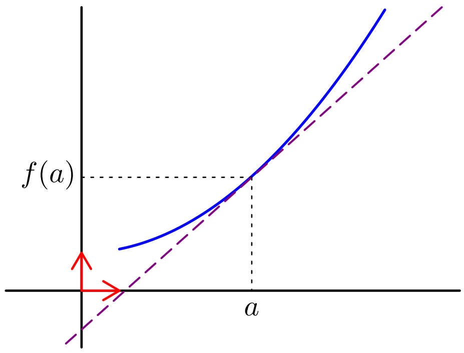
Exercice 11. *La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ admet-elle une fonction réciproque ?*

Exercice 12. *Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc}]-\infty;0] & \to & [0;+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ admet une fonction réciproque et l'expliciter.*

Exercice 13. *On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant une fonction réciproque $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quel est le lien existant entre les représentations graphiques de f et de g ?*

2 Dérivation d'une fonction

Définition 9. *Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est dite* **dérivable** *en $a \in I$ si sa courbe représentative admet une tangente non verticale au point de coordonnées $(a; f(a))$, le coefficient directeur de cette tangente est alors appelé* **nombre dérivé** *de la fonction f en a et notée $f'(a)$.*



Exercice 14. *Déterminer l'ordonnée à l'origine de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2$ au point d'abscisse 1.*

Propriété 1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et dérivable en $a \in I$ alors la courbe représentative de f admet une tangente au point de coordonnées $(a; f(a))$ d'équation :*

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Exercice 15. *Déterminer le point d'intersection de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto xe^{-x}$ au point d'abscisse 2 avec l'axe des abscisses.*

Propriété 2. *On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant une fonction réciproque $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si f est dérivable en $x \in \mathbb{R}$ avec $f'(x) \neq 0$ alors g est dérivable en $y = f(x)$ et $\boxed{g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f' \circ g(y)}}$.*

Exercice 16. *Interpréter graphiquement la propriété 2.*

Propriété 3. *On considère une fonction f à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, alors :*

- *Si $f' = 0$ sur I alors f est constante sur I.*
- *Si $f' \geqslant 0$ (respectivement $f' > 0$) sur I alors f est croissante (respectivement strictement croissante) sur I.*
- *Si $f' \leqslant 0$ (respectivement $f' < 0$) sur I alors f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur I.*

Exercice 17. *Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.*

3 Fonctions usuelles

3.1 Fonctions valeur absolue et partie entière

Définition 10. *On appelle fonction* **valeur absolue** *la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0; +\infty[\\ x & \mapsto & |x| \end{array}$.*

Exercice 18. *Tracer la représentation graphique de la fonction valeur absolue.*

Définition 11. *On appelle fonction* **partie entière** *la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$ où $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à x.*

Remarque 2. *$\lfloor x \rfloor$ est l'unique nombre entier tel que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.*

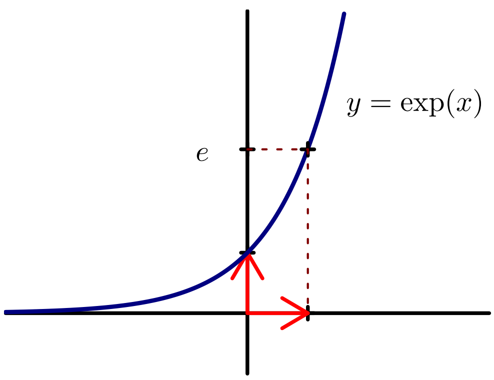
Exercice 19. *Déterminer $\lfloor \sqrt{2} \rfloor$ et $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor$.*

Exercice 20. *Tracer la représentation graphique de la fonction partie entière.*

Exercice 21. *Exprimer $\lfloor -x \rfloor$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.*

3.2 Fonctions exponentielle et logarithme

Définition 12. *On appelle fonction* **exponentielle** *l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et valant 1 en 0, on la note $x \mapsto \exp(x)$ avec $e = \exp(1)$.*



Remarque 3. *La fonction* $\exp$ *est dérivable et* $\boxed{\exp' = \exp}$.

Propriété 4. *Si u est une fonction dérivable, alors la fonction* $\exp(u)$ *est dérivable et* $\boxed{(\exp(u))' = u' \exp(u)}$.

Propriété 5. *La fonction* $\exp$ *est croisssante et strictement positive, de plus :*

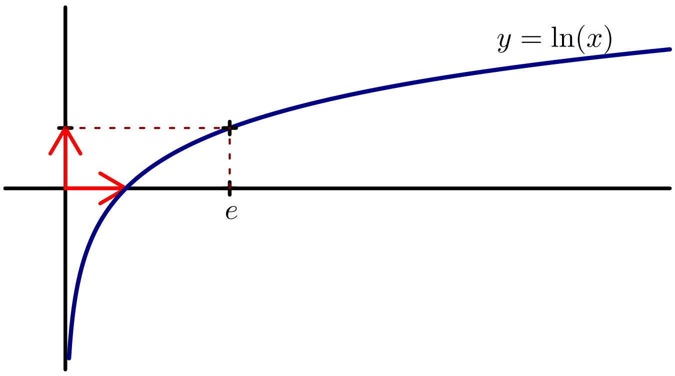
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty}$$

Propriété 6. *La fonction exponentielle vérifie les relations suivantes pour tous nombres réels x et y et pour tout entier relatif n :*

1. $\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)}$
2. $\boxed{\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}}$
3. $\boxed{\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}}$
4. $\boxed{\exp(nx) = [\exp(x)]^n}$

Remarque 4. *Ces formules justifient la notation* $\exp(x) = e^x$.

Définition 13. *On appelle fonction* **logarithme** *et on note* $\ln$ *la fonction qui à tout élément de l'intervalle* $]0;+\infty[$ *associe son unique antécédent par la fonction exponentielle dans l'intervalle* $]-\infty;+\infty[$.



Remarque 5. *On a* $\boxed{\ln(1) = 0}$ *et* $\boxed{\ln(e) = 1}$.

Remarque 6. *On a* $\boxed{\text{Si } x \in \mathbb{R}\ ,\ \ln(e^x) = x}$ *et* $\boxed{\text{Si } x \in]0;+\infty[\ ,\ e^{\ln(x)} = x}$.

Propriété 7. *La fonction* $\ln$ *est dérivable sur* $]0;+\infty[$ *et* $\boxed{\text{Si } x \in]0;+\infty[\ ,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x}}$.

Remarque 7. *La fonction* $\ln$ *est donc la primitive sur* $]0;+\infty[$ *de la fonction inverse s'annulant en* 1.

Propriété 8. *Si u est une fonction dérivable et strictement positive, alors la fonction* $\ln(u)$ *est dérivable et* $\boxed{(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}}$.

Propriété 9. *La fonction* $\ln$ *est croissante, négative sur* $]0;1]$ *et positive sur* $[1;+\infty[$*, de plus :*

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty}$$

Propriété 10. *La fonction* $\ln$ *vérifie les relations suivantes pour tous nombres réels* x *et* y *strictement positifs et pour tout entier relatif* n *:*

1. $\boxed{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)}$
2. $\boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)}$
3. $\boxed{\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)}$
4. $\boxed{\ln(x^n) = n\ln(x)}$
5. $\boxed{\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)}$

3.3 Fonctions puissances

Définition 14. *On appelle* **fonction puissance d'exposant** $a \in \mathbb{R}$, *la fonction notée* $x \mapsto x^a$ *définie sur* $]0;+\infty[$ *par* $\boxed{x^a = e^{a\ln x}}$.

Remarque 8. *Cette définition généralise l'égalité* $x^n = \left(e^{\ln x}\right)^n = e^{n\ln x}$ *pour* $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 22. *Montrer que les fonctions* $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ *et* $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x}}$ *sont des fonctions puissances et donner leurs exposants.*

Exercice 23. *Représenter graphiquement sur une même figure les fonctions puissances d'exposants* 0, -1, 1, 2 *et* $\frac{1}{2}$.

Propriété 11. *La fonction puissance d'exposant* a *:* $x \mapsto x^a$, $a \in \mathbb{R}$, *est dérivable sur* $]0;+\infty[$ *et sa dérivée est la fonction* $x \mapsto ax^{a-1}$.

Propriété 12. *On considère* $a \in \mathbb{R}$, *alors :*

- *Si* $a = 0$, *la fonction puissance d'exposant* a *est constante égale à* 1.
- *Si* $a < 0$, *la fonction puissance d'exposant* a *est décroissante sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de plus* $\lim\limits_{x\to 0} x^a = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = 0$.
- *Si* $a > 0$, *la fonction puissance d'exposant* a *est croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de plus* $\lim\limits_{x\to 0} x^a = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = +\infty$.

Remarque 9. *La fonction puissance d'exposant* $a > 0$ *admettant une limite finie en* 0, *on peut poser* $0^a = 0$ *pour* $a > 0$.

Propriété 13. *On considère deux nombres réels* a *et* b *et* $x, y \in]0;+\infty[$, *alors :*

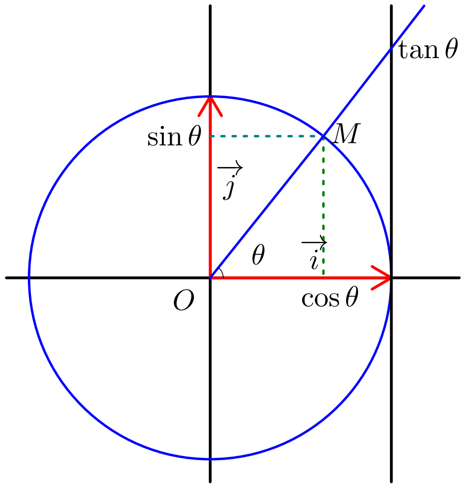
$\boxed{(xy)^a = x^a y^a}$ $\boxed{\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}}$ $\boxed{x^a x^b = x^{a+b}}$ $\boxed{x^{-a} = \frac{1}{x^a}}$ $\boxed{\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}}$ $\boxed{(x^a)^b = x^{ab}}$

Propriété 14. **Croissances comparées**

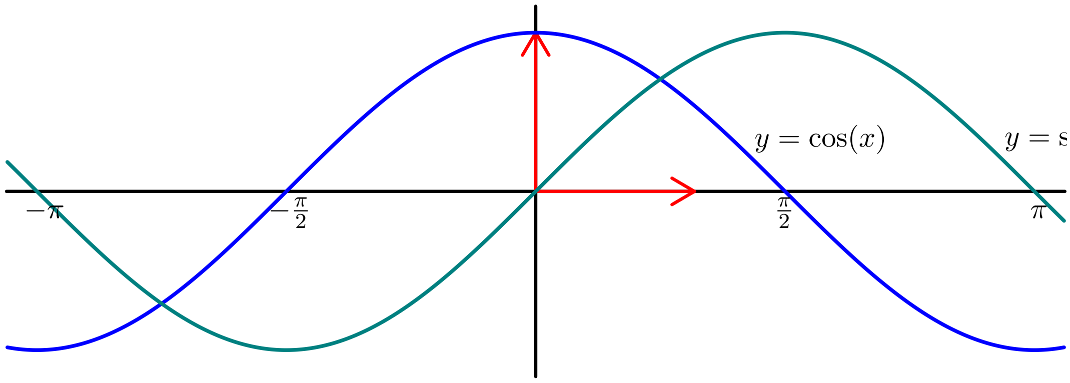
- $\boxed{\text{Si } a \in]0;+\infty[,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0}$
- $\boxed{\text{Si } a \in]0;+\infty[,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0}$
- $\boxed{\text{Si } a \in]0;+\infty[,\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^a \ln x = 0}$

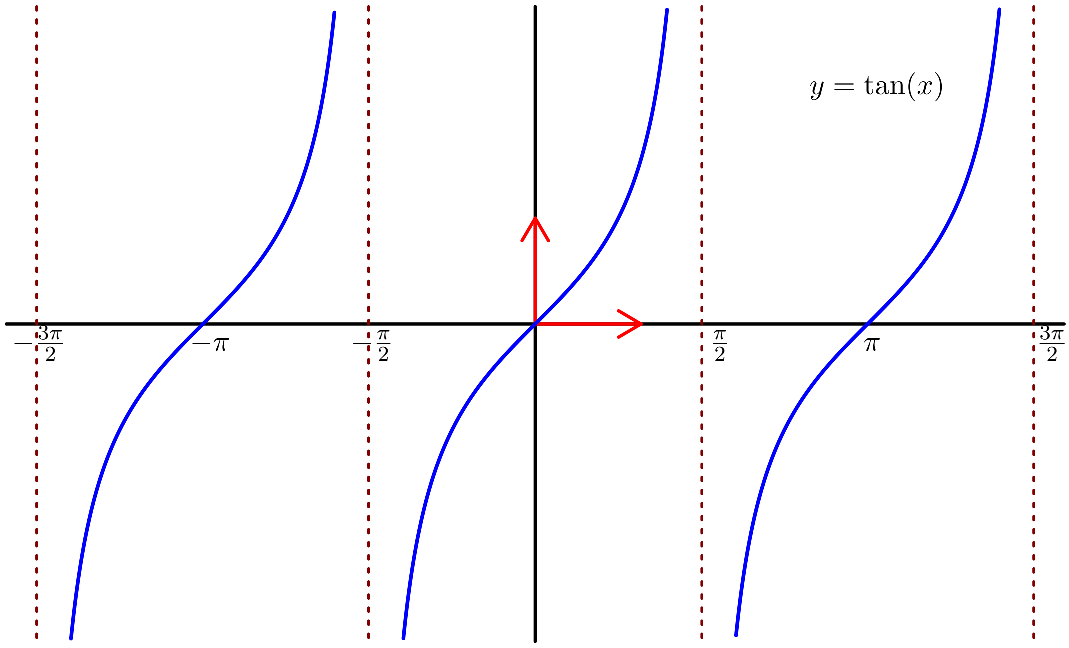
3.4 Fonctions circulaires directes et réciproques

Définition 15. *Le plan étant muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère un point M du cercle de centre O et de rayon 1 et on note $\theta = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$. La fonction de $\mathbb{R}$ dans $[-1;1]$ qui à θ associe l'abscisse du point M est appelée fonction* **cosinus** *et est notée* cos *et la fonction de $\mathbb{R}$ dans $[-1;1]$ qui à θ associe l'ordonnée du point M est appelée fonction* **sinus** *et est notée* sin. *On appelle fonction* **tangente** *et on note* tan *la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \ , \ k\in\mathbb{Z}\right\}$ par* $\boxed{\tan(\theta)=\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}$.



Remarque 10. *Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques et respectivement paire et impaire. La fonction tangente est impaire et π-périodique.*

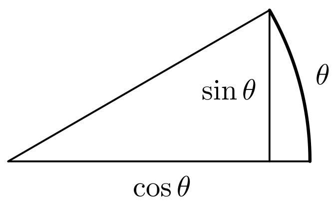




Exercice 24. *Déterminer les valeurs remarquables de la fonction tangente sur l'intervalle* $[0;\frac{\pi}{2}[$.

Propriété 15. *On a* $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$ *et* $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$.

Remarque 11. *Cette propriété peut s'interpréter graphiquement :*



Pour θ petit, on a $\theta \simeq \sin\theta$ *et* $\theta^2 \simeq (\sin\theta)^2 + (1-\cos\theta)^2$.

Propriété 16. *Les fonctions* cos *et* sin *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et* $\boxed{\cos' = -\sin}$, $\boxed{\sin' = \cos}$.

Propriété 17. *Si u est une fonction dérivable, alors les fonctions* $\cos u$ *et* $\sin u$ *sont dérivables et :*

$$\boxed{(\cos u)' = -u' \sin u} \qquad \boxed{(\sin u)' = u' \cos u}$$

Exercice 25. *Montrer que la fonction* $x \mapsto \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ *est π-périodique et étudier ses variations sur l'intervalle* $[0;\pi]$.

Propriété 18. *La fonction* tan *est dérivable sur chacun des intervalles* $\left]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$ $, k \in \mathbb{Z}$ *et*
$\boxed{\text{Si } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \quad , \quad \tan'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2}$.

Remarque 12. *La fonction* tan *est donc croissante sur chacun des intervalles* $\left]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété 19. *Si u est une fonction dérivable à valeurs dans un intervalle* $\left]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$ *alors la fonction* $\tan u$ *est dérivable et :*

$$\boxed{(\tan u)' = \frac{u'}{(\cos u)^2} = u'\left(1 + (\tan u)^2\right)}$$

Propriété 20. *formulaire de trigonométrie*

- $\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$
  $\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$
  $\boxed{\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}}$

- $\boxed{\cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 2(\cos x)^2 - 1 = 1 - 2(\sin x)^2}$
  $\boxed{\sin(2x) = 2\sin x \cos x}$
  $\boxed{\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - (\tan x)^2}}$

Exercice 26. *On pose* $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, *montrer que* $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ *et* $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$.

Définition 16. *On appelle fonction* **arc sinus** *et on note* arcsin*, la fonction qui à tout élément de* $[-1;1]$ *associe son unique antécédent par la fonction sinus dans l'intervalle* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Propriété 21. *On a* $\boxed{\text{Si } x\in[-1;1]\ ,\ \sin(\arcsin x)=x}$ *et* $\boxed{\text{Si } x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\ ,\ \arcsin(\sin x)=x}$.

Exercice 27. *Déterminer les valeurs remarquables de la fonction arcsinus sur l'intervalle* $[-1;1]$.

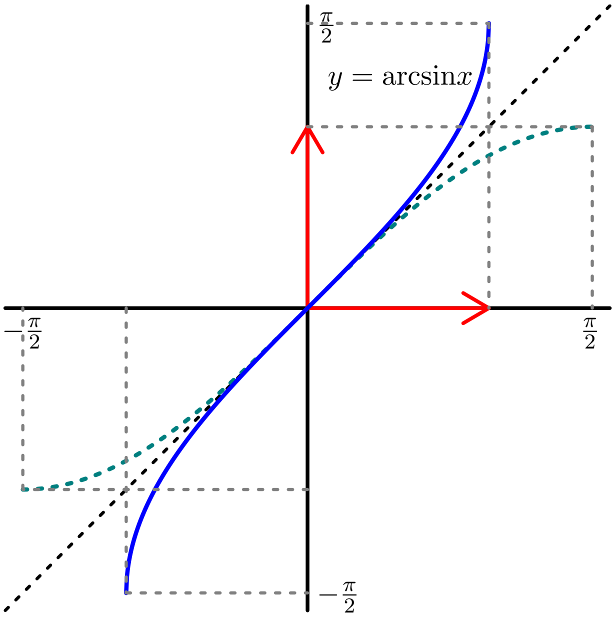
Propriété 22. *La fonction* arcsin *est impaire.*

Exercice 28. *Calculer* $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *et* $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right)$.

Exercice 29. *Démontrer que* $\boxed{\text{Si } x\in[-1;1]\ ,\ \cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}}$.

Propriété 23. *La fonction* arcsin *est dérivable sur* $]-1;1[$ *et* $\boxed{\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

Remarque 13. *La fonction* arcsin *est donc croissante sur* $[-1;1]$.



Propriété 24. *Si* u *est une fonction dérivable à valeurs dans* $]-1;1[$*, alors la fonction* $\arcsin u$ *est dérivable et* $\boxed{(\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$.

Exercice 30. *Déterminer le maximum de la fonction* $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$ *sur* $\mathbb{R}$.

Définition 17. *On appelle fonction* **arc cosinus** *et on note* arccos *la fonction qui à tout élément de* $[-1;1]$ *associe son unique antécédent par la fonction cosinus dans l'intervalle* $[0;\pi]$.

Propriété 25. *On a* $\boxed{\text{Si } x \in [-1;1]\ ,\ \cos(\arccos x) = x}$ *et* $\boxed{\text{Si } x \in [0;\pi]\ ,\ \arccos(\cos x) = x}$.

Exercice 31. *Déterminer les valeurs remarquables de la fonction arccosinus sur l'intervalle* $[-1;1]$.

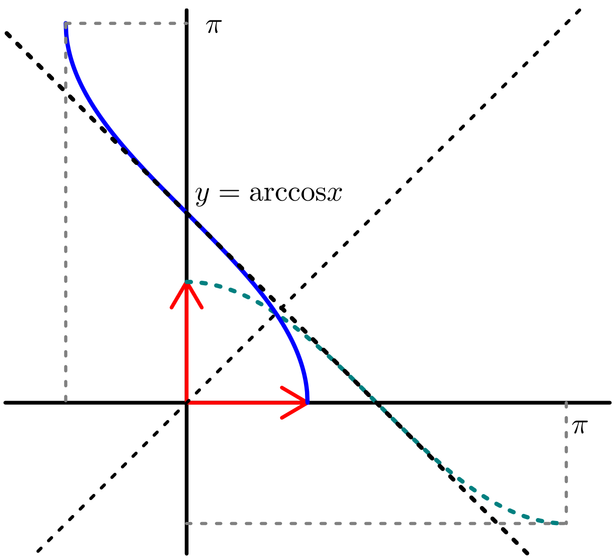
Exercice 32. *Montrer que la fonction* arccos *n'est pas paire.*

Exercice 33. *Calculer* $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *et* $\arccos\left(\cos\dfrac{7\pi}{5}\right)$.

Exercice 34. *Démontrer que* $\boxed{\text{Si } x \in [-1;1]\ ,\ \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}}$.

Propriété 26. *La fonction* arccos *est dérivable sur* $]-1;1[$ *et* $\boxed{\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

Remarque 14. *La fonction* arccos *est donc décroissante sur* $[-1;1]$.



Propriété 27. *Si u est une fonction dérivable à valeurs dans* $]-1;1[$, *alors la fonction* $\arccos u$ *est dérivable et* $\boxed{(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$.

Exercice 35. *Montrer que pour tout* $x \in [-1;1]$, *on a* $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$, *en déduire une symétrie de la courbe représentative de la fonction* arccos.
(on pourra étudier la fonction auxiliaire $\varphi : x \mapsto \arccos(x) + \arccos(-x)$*)*

Définition 18. *On appelle fonction* **arc tangente** *et on note* arctan*, la fonction qui à tout élément de* $\mathbb{R}$ *associe son unique antécédent par la fonction tangente dans l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Remarque 15. *On a* $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\arctan(x)=+\frac{\pi}{2}}$ *et* $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\arctan(x)=-\frac{\pi}{2}}$.

Propriété 28. *On a* $\boxed{\text{Si } x\in\mathbb{R}\ ,\ \tan(\arctan x)=x}$ *et* $\boxed{\text{Si } x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\ ,\ \arctan(\tan x)=x}$.

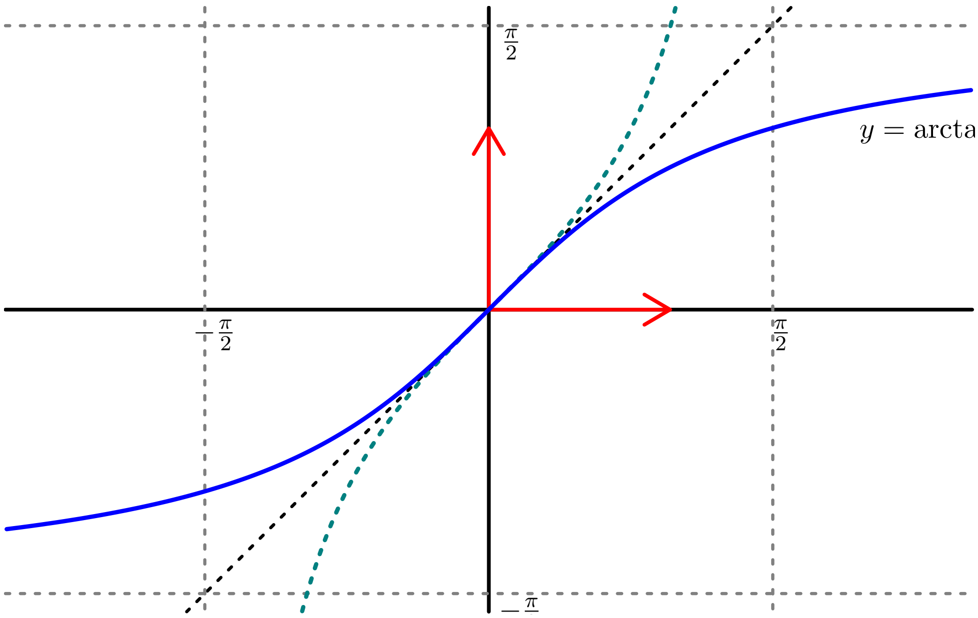
Exercice 36. *Déterminer les valeurs remarquables de la fonction arctangente sur* $\mathbb{R}$.

Propriété 29. *La fonction* arctan *est impaire.*

Exercice 37. *Calculer* $\arctan(\sqrt{3})$ *et* $\arctan\left(\tan\frac{7\pi}{5}\right)$.

Propriété 30. *La fonction* arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\boxed{\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}}$

Remarque 16. *La fonction* arctan *est donc croissante sur* $\mathbb{R}$.



Propriété 31. *Si u est une fonction dérivable, alors la fonction* $\arctan u$ *est dérivable et* $\boxed{(\arctan u)'=\frac{u'}{1+u^2}}$.

Exercice 38. *Déterminer le maximum de la fonction* $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercices supplémentaires

Exercice 39

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 7x + 8}{x-2}$. Déterminer son ensemble de définition, déterminer ses limites aux bornes de cet ensemble, étudier ses variations puis tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal en faisant figurer ses tangentes horizontales.

Exercice 40

Étudier la parité et la périodicité de la fonction $f : x \mapsto x\sin(x) - x^2\cos(3x)$.

Exercice 41

On considère $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que $x \leqslant y \Longleftrightarrow \dfrac{1}{e^x} \geqslant \dfrac{1}{e^y}$.

Exercice 42 ($\star\star$)

On considère $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que $x \leqslant y \Longleftrightarrow x^3 \leqslant y^3$.

Exercice 43

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x^2+1} + 2x = 0$.

Exercice 44 ($\star\star$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x(\sqrt{3x^2+2} - \sqrt{2x^2+3}) \geqslant 0$.

Exercice 45

Déterminer le meilleur encadrement possible de $2x^2 + 1$ pour $-3 \leqslant x \leqslant 5$.

Exercice 46

Déterminer le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto xe^x$.

Exercice 47

On note $f : x \mapsto x^2 - 1$, $g : x \mapsto x - 1$ et $h = (f+g) \circ (f-g)$. Expliciter $h(x)$.

Exercice 48

Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} [0;1] & \rightarrow & [0;1] \\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{x+1} \end{array}$ admet une fonction réciproque et l'expliciter.

Exercice 49 ($\star$)

Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \rightarrow & [0;+\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{x^2}{2x+1} \end{array}$ admet une fonction réciproque et l'expliciter.

Exercice 50

Déterminer l'équation réduite de la tangente à l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ au point de coordonnées $(1; 1)$.

Exercice 51

Déterminer l'équation réduite de la tangente à une parabole d'équation $y = x^2$ au point d'abscisse a.

Exercice 52 ($\star$)

Déterminer pour quels points de la parabole d'équation $y = x^2 + x + 1$ la tangente passe par l'origine du repère.

Exercice 53

Représenter graphiquement la fonction *partie fractionnaire* : $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.

Exercice 54 ($\star\star$)

Résoudre l'équation $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$.

Exercice 55

Simplifier l'expression $\dfrac{e^x + 1}{e^{x-1}} - e$.

Exercice 56 ($\star$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3e^x - e^{2x} \geqslant 2$.

Exercice 57

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x^2}$.

Exercice 58

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 10xe^{-\frac{(x+1)^2}{4}}$.

Exercice 59 ($\star$)

Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Exercice 60

Simplifier l'expression $4\ln\left(\dfrac{27}{\sqrt{12}}\right) - 2\ln\left(\dfrac{\sqrt{18}}{16}\right)$.

Exercice 61 ($\star$)

Montrer que $e^3 \simeq 20$ et $5^3 \simeq 2^7$, en déduire une valeur approchée de $\ln 2$.

Exercice 62

Déterminer le minimum sur $]0; +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto x\ln x$.

Exercice 63 ($\star\star$)

Démontrer l'encadrement $x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$, en déduire la limite en 0_+ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 64 ($\star\star$)

Démontrer que pour x et y deux nombres réels strictement positifs on a $\dfrac{\ln x + \ln y}{2} \leqslant \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.

Exercice 65

Simplifier l'expression $\dfrac{(8x^9)^{\frac{1}{6}}}{(\sqrt{x})^3}$ pour $x \in]0;+\infty[$.

Exercice 66 ($\star$)

Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation $(2x)^{\frac{1}{3}} = (3x)^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 67

Déterminer le minimum sur $]0;+\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto x^x$.

Exercice 68 ($\star$)

Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

Exercice 69 ($\star\star$)

Démontrer que $\ln x \leqslant x - 1$ pour $x > 0$, en déduire que $\pi^e \leqslant e^\pi$.

Exercice 70 ($\star$)

Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 71

Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = x - 2\sin x$ sur l'intervalle $[0;2\pi]$.

Exercice 72

Étudier les variations de la fonction $\tan^2$ sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 73 ($\star$)

Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\tan x}{3 + (\tan x)^2}$ sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 74 ($\star$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x + \cos x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Exercice 75

Calculer $\arcsin\left(\cos\dfrac{11\pi}{3}\right)$.

Exercice 76

Calculer $\arccos\left(\sin\dfrac{16\pi}{3}\right)$.

Exercice 77

Simplifier $\cos(3\arccos x)$ pour $x \in [-1;1]$.

Exercice 78

Démontrer que $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ pour $x \in [-1;1]$.
(on pourra étudier la fonction auxiliaire $\varphi : x \mapsto \arcsin x + \arccos x$)

Exercice 79 ($\star\star$)

Résoudre l'équation $\arcsin x = \arccos\dfrac{1}{4} - \arccos\dfrac{1}{3}$.

Exercice 80 ($\star\star$)

Montrer que la fonction $x \mapsto x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$ est dérivable sur l'intervalle $]-1;1[$ puis calculer sa dérivée. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ et retrouver ce résultat géométriquement.

Exercice 81

Déterminer le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 3(\arctan x)^3 - \pi^2\arctan x$.

Exercice 82 ($\star$)

Simplifier $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 83 ($\star$)

Simplifier $\cos(\arctan x)$ et $\sin(\arctan x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 84 ($\star\star$)

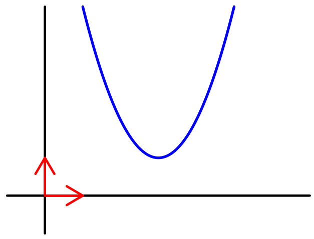
Calculer $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{5} + \arctan\dfrac{1}{8}$.

Exercice 85 ($\star\star\star$)

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \arctan\left(\frac{2}{1^2}\right) + \arctan\left(\frac{2}{2^2}\right) + \arctan\left(\frac{2}{3^2}\right) + \cdots + \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right)$.
(on pourra chercher à simplifier l'expression $\arctan(k+1) - \arctan(k-1)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$)

Réponses

1)



2) translation de vecteur $a\overrightarrow{j}$, translation de vecteur $-a\overrightarrow{i}$, dilatation de coefficient a sur l'axe des ordonnées et dilatation de coefficient $\frac{1}{a}$ sur l'axe des abscisses.

3) Les fonctions puissances d'exposants pairs sont paires et les fonctions puissances d'exposants impairs sont impaires.

4) La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

5) La fonction est paire et $\frac{2\pi}{3}$-périodique.

6) On remarque que $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$.

7) On utilise la croissance de la fonction exp pour le sens direct et la croissance de la fonction ln pour la réciproque.

8) On remarque que $0 \leqslant x^2 \leqslant x^2 + 1$ d'où $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

9) La fonction f admet pour minimum 0 mais n'admet pas de maximum.

10) $f + gh$, $h \circ (g + 2f)$ et $g \circ (2h - f)$.

11) On remarque que 1 admet deux antécédents par la fonction f.

12) $g(x) = -\sqrt{x}$.

13) Les courbes représentatives des fonctions f et g sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

14) -1.

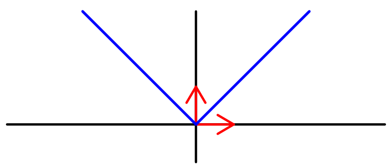
15) Point de coordonnées $(4; 0)$.

16) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $f(x)$ est l'inverse du coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse x.

17)

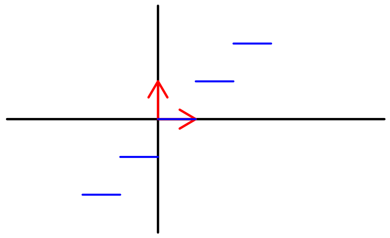
x	$-\infty$		1		$+\infty$
variations de f			$\frac{1}{e}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				0

18)



19) $\lfloor\sqrt{2}\rfloor = 1$ et $\lfloor-\sqrt{2}\rfloor = -2$.

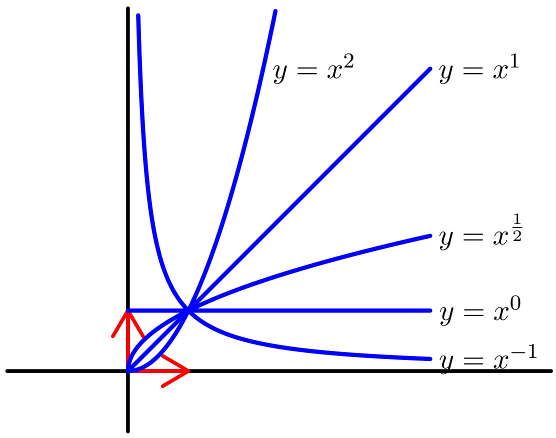
20)



21) $\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -\lfloor x \rfloor - 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$.

22) x^1, x^2, x^{-1}, $x^{\frac{1}{2}}$ et $x^{-\frac{3}{2}}$.

23)



24)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

25)

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
variations	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

26) On remarque que $\frac{1}{1+t^2} = \left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$ et on utilise les formules de duplication.

27)

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

28) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ et $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right) = -\frac{2\pi}{5}$.

29) On remarque que si $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ alors $\cos\theta = \sqrt{1 - (\sin\theta)^2}$.

30) $\dfrac{\pi}{6}$.

31)

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

32) $\arccos(-1) \neq \arccos(1)$.

33) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ et $\arccos\left(\cos\frac{7\pi}{5}\right) = \frac{3\pi}{5}$.

34) On remarque que si $\theta \in [0; \pi]$ alors $\sin\theta = \sqrt{1 - (\cos\theta)^2}$.

35) On montre par dérivation que φ est constante égale à $\varphi(0)$, la courbe représentative de la fonction arccos est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0; \frac{\pi}{2})$.

36)

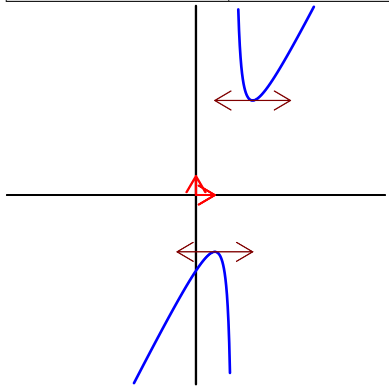
x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

37) $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ et $\arctan\left(\tan\frac{7\pi}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}$.

38) $\arctan\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

39)

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$



40) La fonction est paire et non périodique.

41) $x \leqslant y \Longleftrightarrow -x \geqslant y \Longleftrightarrow e^{-x} \geqslant e^{-y}$.

42) On remarque que $x^3 - y^3 = (x-y)((x+\frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2)$.

43) La solution est négative et vaut $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

44) L'ensemble des solutions de l'inéquation est $[-1;0] \cup [1;+\infty[$.

45) Pour $-3 \leqslant x \leqslant 5$ on a $1 \leqslant 2x^2 + 1 \leqslant 51$.

46) Le minimum de la fonction f est $-\frac{1}{e}$.

47) $h(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 2$.

48) $g(y) = \frac{y}{2-y}$.

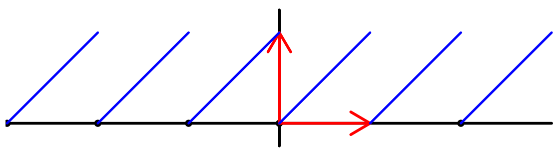
49) $g(y) = y + \sqrt{y^2 + y}$.

50) $y = 2 - x$.

51) $y = 2ax - a^2$.

52) $(-1;1)$ et $1;3$.

53)



54) Les solutions sont les réels x tels que $x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2}$.

55) On a $\dfrac{e^x + 1}{e^{x-1}} - e = e^{1-x}$.

56) On a $0 \leqslant x \leqslant \ln 2$ en posant $X = e^x$.

57)

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
variations de f	0	$\searrow$	$-\sqrt{\frac{e}{2}}$	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	$\searrow$	0

58)

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	0	$\searrow$	$-20e^{-\frac{1}{4}}$	$\nearrow$	$\frac{10}{e}$	$\searrow$	0

59) f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

60) $8\ln 3 + 3\ln 2$.

61) $\ln 2 \simeq \frac{9}{13}$.

62) Le minimum est $-\frac{1}{e}$.

63) On étudie les fonctions $x \mapsto x - \ln(1+x)$ et $x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$. On en déduit $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

64) On étudie les variations de la fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) - \dfrac{\ln x + \ln y}{2}$.

65) $\sqrt{2}$.

66) L'équation admet pour unique solution $\frac{4}{27}$.

67) Le minimum est $e^{-\frac{1}{e}}$.

68) On a $S = \{1;4\}$.

69) On étudie les variations de la fonction $x \mapsto x-1-\ln x$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ puis on utilise l'inégalité avec $x = \dfrac{\pi}{e}$.

70) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2^x)^{\frac{1}{x}} = 2$.

71)

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
variations de f	0	$\searrow$	$\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$	$\searrow$	2π

72)

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
variations de f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

73)

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
variations de f	0	$\searrow$	$\frac{1}{6}\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{6}\sqrt{3}$	$\searrow$	0

74) On a $x = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ en élevant l'équation au carré et en éliminant les solutions de l'équation $\sin x + \cos x = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

75) $\dfrac{\pi}{6}$.

76) $\dfrac{5\pi}{6}$.

77) $4x^3 - 3x$.

78) φ est de dérivée nulle et donc constante égale à $\varphi(0)$ sur $[-1;1]$.

79) $x = \dfrac{\sqrt{15} - 2\sqrt{2}}{12}$.

80) On a $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}$.

81) $\dfrac{2}{9}\pi^3$.

82) On a $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ si $x > 0$ et $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$ si $x < 0$.

83) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

84) $\dfrac{\pi}{4}$ en montrant que $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} = \arctan\frac{7}{9}$ puis que $\arctan\frac{7}{9} + \arctan\frac{1}{8} = \arctan 1$.

85) On montre que $\arctan(k+1) - \arctan(k-1) = \arctan\frac{2}{k^2}$ puis on procède par télescopage avec $S_n = \arctan(n+1) + \arctan(n) - \arctan(1)$.