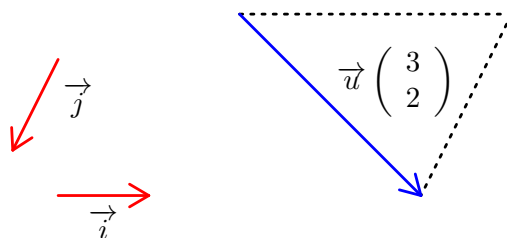


IV. Géométrie du plan

1 Repérage dans le plan

1.1 Repérage cartésien

Définition 1. On appelle **base** du plan un couple (\vec{i}, \vec{j}) avec \vec{i} et \vec{j} deux vecteurs non colinéaires du plan. Tout vecteur \vec{u} du plan s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs \vec{i} et \vec{j} sous la forme $\vec{u} = \lambda \vec{i} + \mu \vec{j}$ avec λ et μ des nombres réels. Les nombres λ et μ sont appelés **coordonnées** du vecteur \vec{u} dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , le nombre λ est appelé **abscisse** du vecteur \vec{u} dans la base (\vec{i}, \vec{j}) et le nombre μ est appelé **ordonnée** du vecteur \vec{u} dans la base (\vec{i}, \vec{j}) . On note $\vec{u} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$.

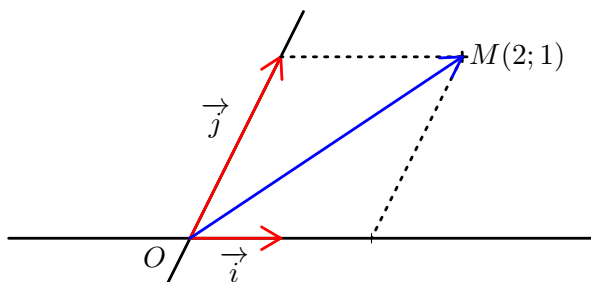


Remarque 1. Dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , on a $\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Définition 2. Une base du plan est dite **orthogonale** si ses deux vecteurs sont orthogonaux et **orthonormale** si ses deux vecteurs sont orthogonaux et de même norme.

Exercice 1. Le plan étant muni d'une base orthonormale (\vec{i}, \vec{j}) , on considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ainsi que $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$. Faire une figure puis déterminer les coordonnées du vecteur \vec{w} .

Définition 3. On appelle **repère cartésien** du plan un triplet (O, \vec{i}, \vec{j}) , avec O un point du plan et (\vec{i}, \vec{j}) une base du plan. Le point O est appelé **origine** du repère, la droite (O, \vec{i}) est appelée **axe des abscisses** et la droite (O, \vec{j}) est appelée **axe des ordonnées**. Tout point M du plan est repéré de manière unique par deux nombres x et y tels que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Les nombres x et y sont appelés **coordonnées** du point M dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , le nombre x est appelé **abscisse** du point M dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) et le nombre y est appelé **ordonnée** du point M dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . On note $M(x; y)$.



Exercice 2. Le plan étant muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points $A(-1; 0)$, $B(2; 1)$ et $C(1; -2)$. Faire une figure puis déterminer la nature du triangle ABC .

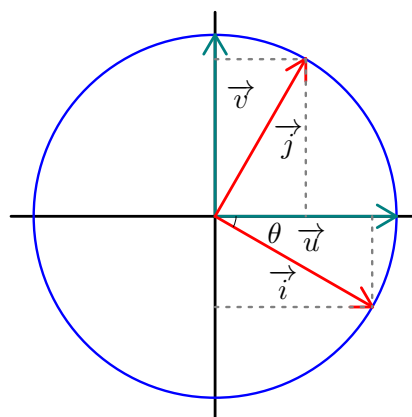
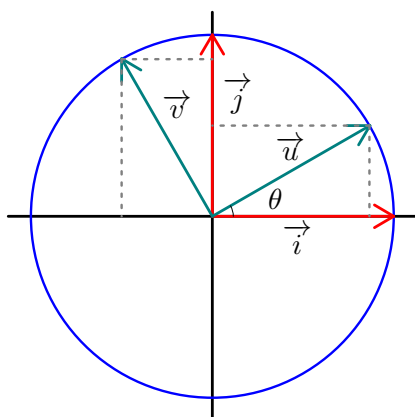
1.2 Repérage polaire

Propriété 1. Dans le plan complexe, l'image d'un vecteur \vec{w} d'affixe $z_{\vec{w}}$ par la rotation d'angle θ est le vecteur $\vec{w}' = r_\theta(\vec{w})$ d'affixe $z_{\vec{w}'} = e^{i\theta} z_{\vec{w}}$.

Exercice 3. Dans le plan muni d'une base orthonormale directe (\vec{i}, \vec{j}) , on considère le vecteur $\vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ainsi que son image \vec{w}' par la rotation d'angle $-\frac{\pi}{6}$. Faire une figure puis déterminer les coordonnées du vecteur \vec{w}' .

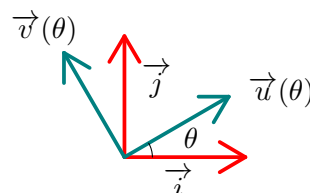
Corollaire 1. Le plan étant muni d'une base orthonormale directe (\vec{i}, \vec{j}) , on considère la base orthonormale (\vec{u}, \vec{v}) obtenue par rotation d'angle θ des vecteurs \vec{i} et \vec{j} . On a :

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{v} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{i} = \cos \theta \vec{u} - \sin \theta \vec{v} \\ \vec{j} = \sin \theta \vec{u} + \cos \theta \vec{v} \end{cases}$$



Définition 4. Le plan étant muni d'une base orthonormale directe (\vec{i}, \vec{j}) , on définit pour $\theta \in \mathbb{R}$ la **base polaire** $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ par :

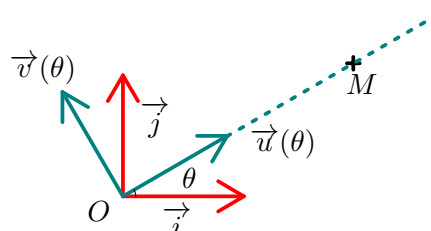
$$\begin{cases} \vec{u}(\theta) = r_\theta(\vec{i}) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{v}(\theta) = r_\theta(\vec{j}) = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \end{cases}$$



Remarque 2. Dans le plan complexe, les affixes des vecteurs $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$ sont respectivement $e^{i\theta}$ et $e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} = ie^{i\theta}$.

Propriété 2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{i}, \vec{j}) on considère un point $M(x; y)$, alors il existe deux réels ρ et θ tels que $\vec{OM} = \rho \vec{u}(\theta)$. Les nombres ρ et θ sont appelés **coordonnées polaires** du point M dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$



Remarque 3. Il n'y a pas unicité des coordonnées polaires.

Remarque 4. La base polaire $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ est une base mobile car elle dépend du point M considéré.

Exercice 4. Le plan étant muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère le point $M(-1; 1)$. Faire une figure puis déterminer les coordonnées polaires du point M .

2 Produit scalaire et déterminant dans le plan

2.1 Produit scalaire

Définition 5. On appelle **produit scalaire** de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} du plan :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Remarque 5. Le produit scalaire est symétrique car $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$.

Remarque 6. Le produit scalaire est nul si et seulement si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

Propriété 3. On considère trois points A, B et C non alignés du plan et on note H le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) , alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AH} \cdot \vec{AC} = \pm AH \times AC$.



Propriété 4. On considère deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ du plan complexe, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Remarque 7. Cette propriété n'est valide que si le plan est muni d'une base orthonormale.

Exercice 5. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points $A(1; -1), B(2; 1)$ et $C(-1; 3)$. Faire une figure puis exprimer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ de deux manières différentes et en déduire la mesure de l'angle \widehat{BAC} .

Propriété 5. Bilinéarité du produit scalaire

On considère trois vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} du plan et deux nombres réels λ et μ , alors :

$$(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \mu(\vec{v} \cdot \vec{w})$$

Propriété 6. Formule d'Al-Kashi

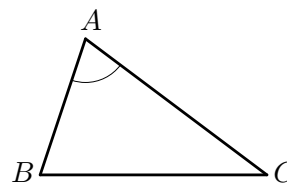
On considère deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} du plan, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Théorème 1. Théorème d'Al-Kashi ou Loi des cosinus

On considère un triangle ABC du plan, alors :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$



Remarque 8. Ce théorème est une généralisation du théorème de Pythagore.

Exercice 6. On considère un triangle ABC tel que $AB = 2, AC = 3$ et $BC = 4$. Faire une figure puis déterminer les mesures des angles de ce triangle.

2.2 Déterminant

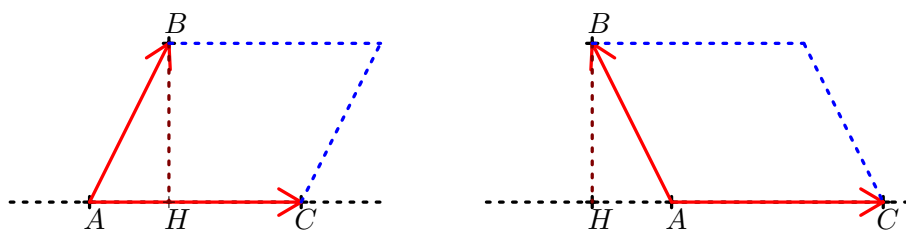
Définition 6. On appelle **déterminant** de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} du plan :

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Remarque 9. Le déterminant est antisymétrique car $[\vec{v}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{v}]$.

Remarque 10. Le déterminant est nul si et seulement si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Propriété 7. On considère trois points A, B et C non alignés du plan et on note H le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) , alors $[\vec{AB}, \vec{AC}] = [\vec{HB}, \vec{AC}] = \pm HB \times AC$.



Propriété 8. On considère deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ du plan complexe, alors :

$$[\vec{u}, \vec{v}] = xy' - yx'$$

Remarque 11. Cette propriété n'est valide que si le plan est muni d'une base orthonormale.

Exercice 7. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1; -1)$, $B(2; 1)$ et $C(-1; 3)$. Faire une figure puis calculer $[\vec{AB}, \vec{AC}]$, en déduire l'aire du triangle ABC .

Exercice 8. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Faire une figure puis calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $[\vec{u}, \vec{v}]$, en déduire la mesure de l'angle (\vec{u}, \vec{v}) .

Propriété 9. Bilinéarité du déterminant

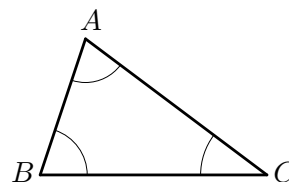
On considère trois vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} du plan et deux nombres réels λ et μ , alors :

$$[\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \vec{w}] = \lambda [\vec{u}, \vec{w}] + \mu [\vec{v}, \vec{w}]$$

Théorème 2. Loi des sinus

On considère un triangle ABC du plan, alors :

$$\frac{\sin \widehat{BAC}}{BC} = \frac{\sin \widehat{ABC}}{AC} = \frac{\sin \widehat{ACB}}{AB}$$



Exercice 9. On considère un triangle ABC tel que $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 6$ et $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$. Faire une figure puis déterminer les mesures possibles de l'angle \widehat{BAC} .

3 Droites et cercles du plan

3.1 Droites

Propriété 10. Équation cartésienne d'une droite

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, les coordonnées $(x; y)$ des points d'une droite \mathcal{D} vérifient une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec a, b et c des nombres réels et $(a; b) \neq (0; 0)$, cette équation est appelée une **équation cartésienne** de la droite \mathcal{D} .

Réciproquement, l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ vérifiant une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec a, b et c des nombres réels et $(a; b) \neq (0; 0)$ est une droite.

Exercice 10. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1; 2)$ et $B(-3; 5)$ ainsi qu'un point $M(x; y) \in (AB)$. Faire une figure puis calculer $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}]$, en déduire une équation cartésienne de la droite (AB) .

Propriété 11. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la droite \mathcal{D} d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec a, b et c des nombres réels et $(a; b) \neq (0; 0)$. Alors le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** de la droite \mathcal{D} et le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un **vecteur normal** à la droite \mathcal{D} .

Exercice 11. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la droite \mathcal{D}_1 d'équation $3x - 2y + 5 = 0$, le point $A(5; -2)$ et la droite \mathcal{D}_2 passant par A et parallèle à la droite \mathcal{D}_1 . Faire une figure puis déterminer une équation cartésienne de la droite \mathcal{D}_2 .

Propriété 12. Paramétrage d'une droite

Dans le plan muni d'un repère orthonormal on considère une droite \mathcal{D} passant par le point $A(x_A; y_A)$ et admettant $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Alors le point $M(x; y)$ appartient à la droite \mathcal{D} si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + t x_{\vec{u}} \\ y = y_A + t y_{\vec{u}} \end{cases}$$

Cette écriture est appelée un **paramétrage** de la droite \mathcal{D} .

Exercice 12. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer un paramétrage de la droite passant par les points $A(1; 2)$ et $B(-3; 5)$.

Propriété 13. Intersection de deux droites

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère une droite \mathcal{D} d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ ainsi qu'une droite \mathcal{D}' d'équation cartésienne $a'x + b'y + c' = 0$. Alors :

- Si $ab' - ba' = 0$, les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont parallèles ou confondues.
- Si $ab' - ba' \neq 0$, les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' admettent un unique point d'intersection.

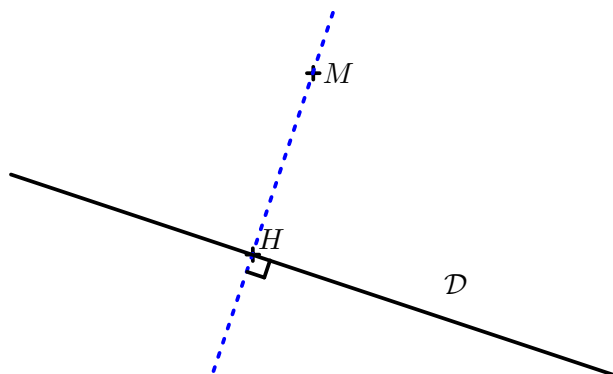
Exercice 13. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1; 2)$, $B(-1, -3)$, $C(1, -2)$ et $D(4; 3)$ ainsi que les droites (AB) et (CD) .

- Faire une figure.
- Déterminer une équation cartésienne des droites (AB) et (CD) .
- Montrer que les droites (AB) et (CD) admettent un unique point d'intersection I .
- On note $(x; y)$ les coordonnées du point I . Exprimer y en fonction de x en utilisant l'équation cartésienne de la droite (AB) puis remplacer y dans l'équation cartésienne de la droite (CD) afin de déterminer les coordonnées du point I .

Propriété 14. Distance d'un point à une droite

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère une droite \mathcal{D} d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec a, b et c des nombres réels et $(a; b) \neq (0; 0)$. Alors la distance d'un point $M(x_M; y_M)$ à la droite \mathcal{D} est :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Remarque 12. La distance de l'origine du repère à la droite \mathcal{D} est $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Exercice 14. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère le point $M(5; -2)$ ainsi que la droite \mathcal{D} d'équation $3x - 2y + 5 = 0$. Faire une figure puis calculer la distance du point M à la droite \mathcal{D} .

3.2 Cercles

Propriété 15. Équation cartésienne d'un cercle

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, les coordonnées $(x; y)$ des points d'un cercle \mathcal{C} de centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon R vérifient une équation de la forme $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$, cette équation est appelée une **équation cartésienne** du cercle \mathcal{C} .

Réciproquement, l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ vérifiant une équation de la forme $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$ avec x_Ω, y_Ω et R des nombres réels et $R \geq 0$ est un cercle \mathcal{C} de centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon R .

Exercice 15. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, montrer que l'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ est l'équation d'un cercle dont on déterminera le centre ainsi que le rayon.

Propriété 16. Paramétrage d'un cercle

Dans le plan muni d'un repère orthonormal on considère un cercle \mathcal{C} de centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon R . Alors le point $M(x; y)$ appartient au cercle \mathcal{C} si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x = x_\Omega + R \cos t \\ y = y_\Omega + R \sin t \end{cases}$$

Cette écriture est appelée un **paramétrage** du cercle \mathcal{C} .

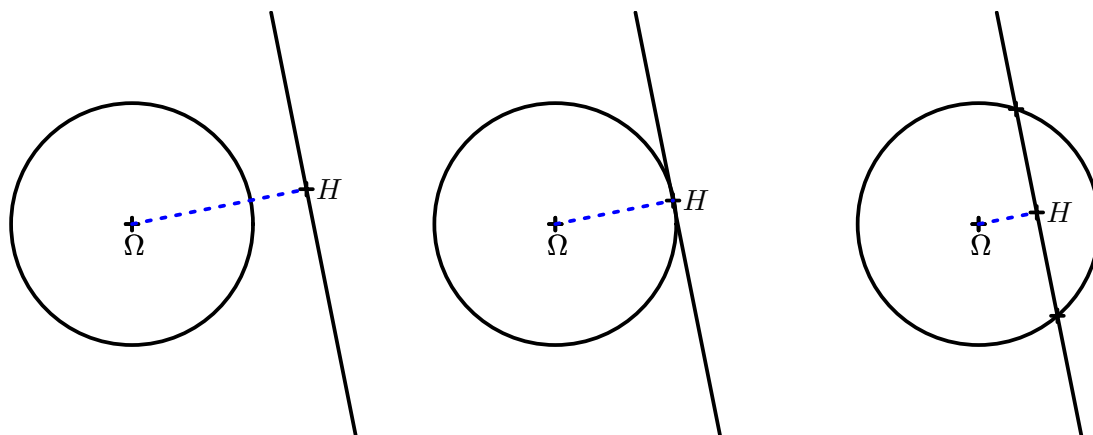
Exercice 16. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère le cercle \mathcal{C} de centre $\Omega(-1; 3)$ et de rayon 2.

- Faire une figure.
- Déterminer un paramétrage du cercle \mathcal{C} .
- Placer sur la figure les points $M_{t=0}, M_{t=\frac{\pi}{2}}, M_{t=\pi}$ et $M_{t=\frac{3\pi}{2}}$.

Propriété 17. Intersection d'une droite et d'un cercle

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère une droite \mathcal{D} ainsi qu'un cercle \mathcal{C} de centre Ω et de rayon $R > 0$. Alors :

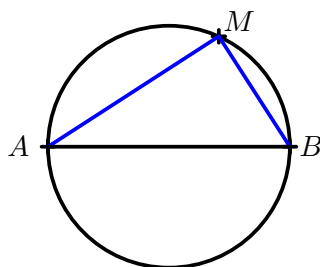
- Si $d(\Omega, \mathcal{D}) > R$, la droite \mathcal{D} et le cercle \mathcal{C} n'ont aucun point d'intersection.
- Si $d(\Omega, \mathcal{D}) = R$, la droite \mathcal{D} et le cercle \mathcal{C} ont un unique point d'intersection et la droite \mathcal{D} est dite tangente en ce point au cercle \mathcal{C} .
- Si $d(\Omega, \mathcal{D}) < R$, la droite \mathcal{D} et le cercle \mathcal{C} ont deux points distincts d'intersection.



Exercice 17. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la droite \mathcal{D} et le cercle \mathcal{C} d'équations cartésiennes respectives $x - y + 4 = 0$ et $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$.

- Faire une figure.
- Montrer que \mathcal{C} et \mathcal{D} admettent deux points d'intersection.
- On note $(x; y)$ les coordonnées d'un point d'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{D} . Exprimer y en fonction de x en utilisant l'équation cartésienne de la droite \mathcal{D} puis remplacer y dans l'équation cartésienne du cercle \mathcal{C} afin de déterminer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{D} .

Propriété 18. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère deux points distincts A et B . Alors le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

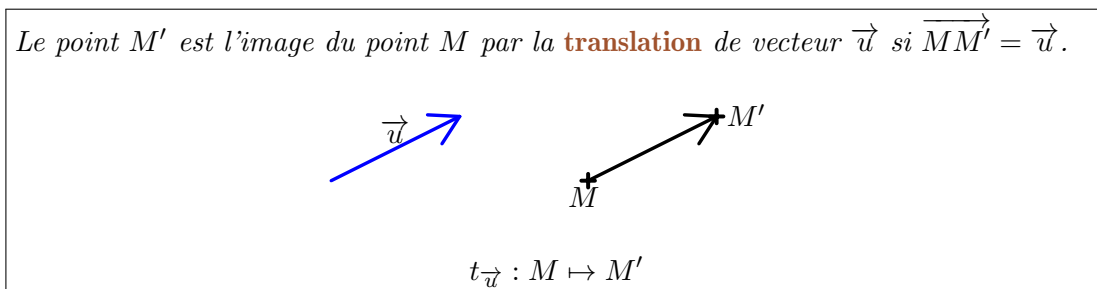


Exercice 18. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(-2; 1)$ et $B(2; 4)$. Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$.

4 Transformations du plan

4.1 Translation

Définition 7. Le point M' est l'image du point M par la **translation** de vecteur \vec{u} si $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

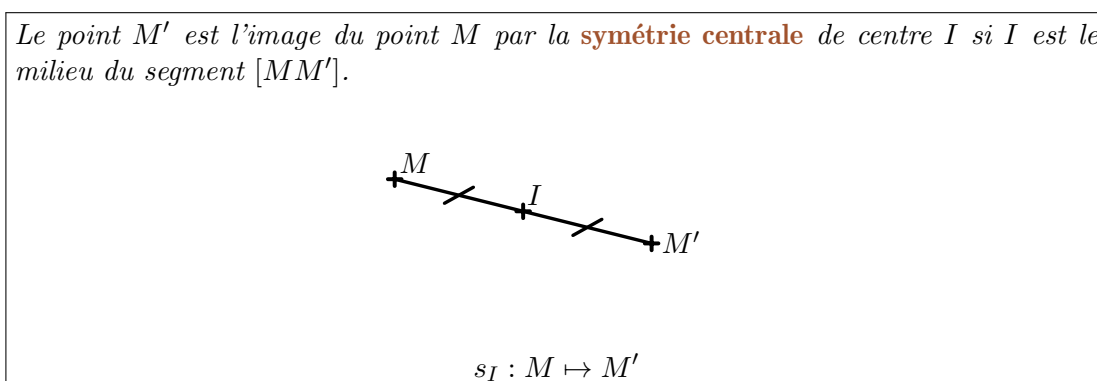


Exercice 19. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer l'image A' du point $A(-1;3)$ par la translation de vecteur $\vec{u} \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$.

Propriété 19. Une translation de vecteur non nul n'admet aucun point invariant.

4.2 Symétrie centrale

Définition 8. Le point M' est l'image du point M par la **symétrie centrale** de centre I si I est le milieu du segment $[MM']$.

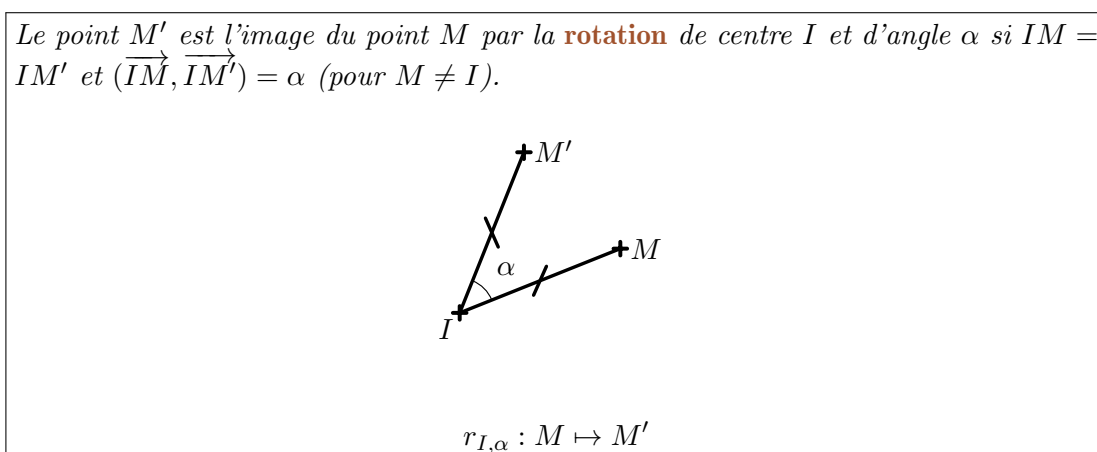


Exercice 20. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(5;2)$ et $B(3;-1)$. Déterminer l'image A' du point A par la symétrie centrale de centre B .

Propriété 20. Une symétrie centrale admet son centre pour seul point invariant.

4.3 Rotation

Définition 9. Le point M' est l'image du point M par la **rotation** de centre I et d'angle α si $IM = IM'$ et $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = \alpha$ (pour $M \neq I$).

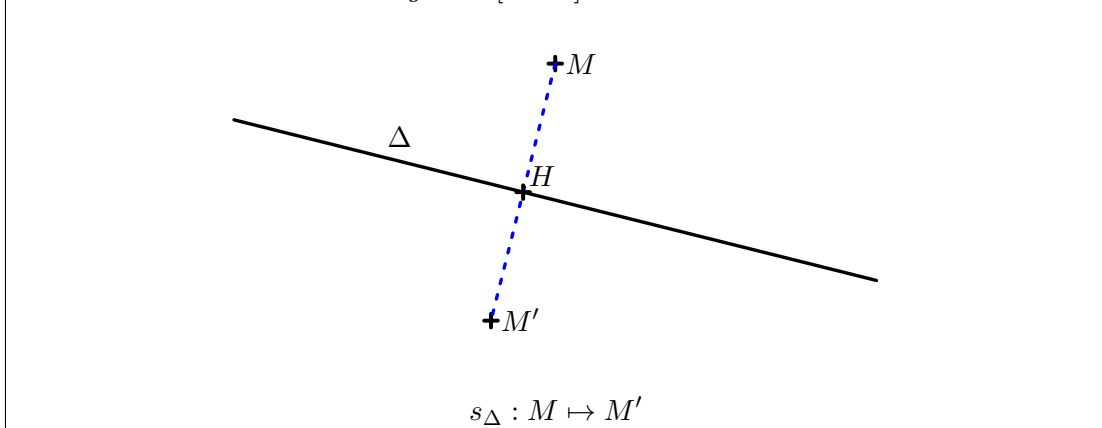


Exercice 21. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, déterminer l'image A' du point $A(2;3)$ par la rotation de centre $I(-1;2)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. (on pourra utiliser les nombres complexes)

Propriété 21. Une rotation d'angle non nul admet son centre pour seul point invariant.

4.4 Réflexion

Définition 10. Le point M' est l'image du point M par la **réflexion** d'axe Δ si le projeté orthogonal de M sur Δ est le milieu du segment $[MM']$.



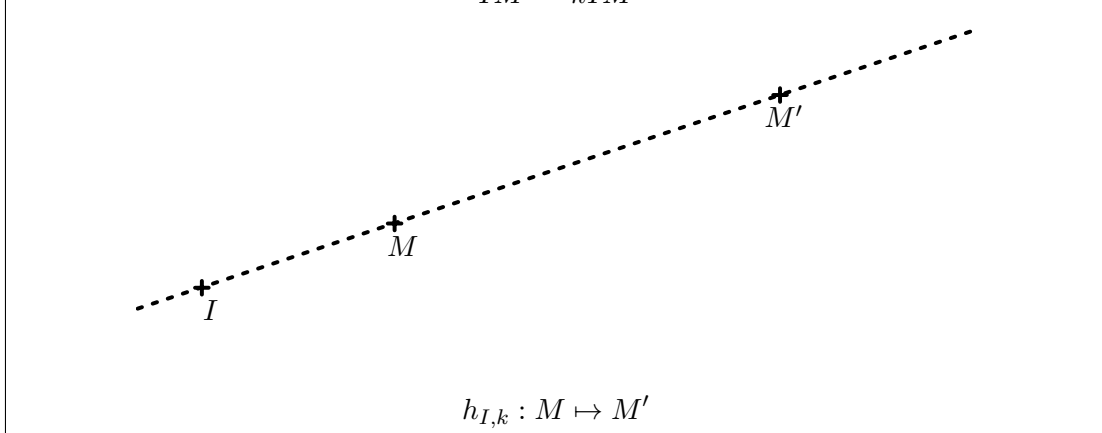
Exercice 22. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer l'image A' du point $A(1; 2)$ par la réflexion d'axe Δ d'équation cartésienne $x + y = 0$.

Propriété 22. L'ensemble des points invariants par une réflexion est son axe.

4.5 Homothétie

Définition 11. Soit I un point du plan et k un nombre réel non nul, on appelle **homothétie** de centre I et de rapport k la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :

$$\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$$



Remarque 13. Si $k = 1$ l'homothétie est la transformation identité, si $k = -1$ l'homothétie est une symétrie centrale de centre I .

Exercice 23. On considère un segment $[AB]$ de longueur 4 cm, construire le point B_1 image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$ ainsi que le point B_2 image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$.

Propriété 23. Une homothétie de rapport différent de 1 admet son centre pour seul point invariant.

Exercice 24. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(0; 2)$, $B(1; -1)$, $C(-1; 0)$ et $I(-2; 1)$ ainsi que les points A' , B' et C' images respectives des points A , B et C par l'homothétie de centre I et de rapport -2 . Faire une figure puis déterminer les coordonnées des points A' , B' et C' .

Exercices supplémentaires

Exercice 25

Le plan étant muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points $A(-1; 4)$, $B(3; -2)$ et $C(-5; 1)$ ainsi qu'un point quelconque $M(x; y)$. Faire une figure. Exprimer les coordonnées du vecteur $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ en fonction de x et y et en déduire les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC défini par $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

Exercice 26 (★)

Le plan étant muni d'une base orthonormale (\vec{i}, \vec{j}) , on considère deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Faire une figure. Montrer que (\vec{u}, \vec{v}) est une base du plan et déterminer les coordonnées des vecteurs \vec{i} et \vec{j} dans cette base.

Exercice 27 (★)

Le plan étant muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ainsi que deux points $O'(1; 2)$ et $M(3; 4)$. Faire une figure. Montrer que (O', \vec{u}, \vec{v}) est un repère du plan et déterminer les coordonnées du point M dans celui-ci.

Exercice 28 (★★)

Dans le plan, on considère un triangle ABC ainsi que le point G défini par $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$. Montrer que le point G est l'intersection des médianes du triangle ABC .

Exercice 29

Dans le plan complexe, on considère un vecteur \vec{u} d'affixe $3 - 2i$.

Déterminer l'affixe de l'image \vec{u}' de ce vecteur par la rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 30

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Déterminer en fonction de x et y les coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ de l'image \vec{u}' de ce vecteur par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 31 (★)

Le plan étant muni d'une base orthonormale directe (\vec{i}, \vec{j}) , on considère la base (\vec{u}, \vec{v}) obtenue par rotation d'angle $-\frac{\pi}{6}$ de cette dernière.

Déterminer les coordonnées des vecteurs \vec{i} et \vec{j} dans la base (\vec{u}, \vec{v}) .

Exercice 32

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, déterminer les coordonnées polaires du point M de coordonnées $(-5\sqrt{3}; -5)$.

Exercice 33 (★★)

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, déterminer les coordonnées polaires du point M de coordonnées $(\sqrt{3} - 2; 3 - 2\sqrt{3})$.

Exercice 34

On considère un carré $ABCD$ ainsi que les points I, J et K définis par $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Faire une figure. Exprimer les coordonnées des points A, B, C, D, I, J et K dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ puis calculer $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 35

Le plan étant muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points $A(1; 2)$ et $B(-3; 4)$. Faire une figure. Déterminer la mesure de l'angle \widehat{AOB} .

Exercice 36 (★)

On considère deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} du plan.

Exprimer $\|2\vec{u} + 3\vec{v}\|^2 - \|3\vec{u} + 2\vec{v}\|^2$ en fonction de $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

Exercice 37 (★★)

Dans le plan, on considère un segment $[AB]$, déterminer l'ensemble des points M vérifiant $MA^2 + MB^2 = AB^2$.

Exercice 38

On considère un triangle ABC rectangle isocèle en A ainsi que les points I, J et K définis par $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$. Faire une figure. Exprimer les coordonnées des points A, B, C, I, J et K dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ puis calculer $[\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}]$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 39

Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $i - 2, 1 - i$ et $5 + 2i$. Faire une figure. Calculer l'aire du triangle ABC .

Exercice 40

On considère deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} quelconques du plan, simplifier $[\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}]$.

Exercice 41 (★)

Démontrer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = [\vec{u}, r_{\frac{\pi}{2}}(\vec{v})]$ et $[\vec{u}, \vec{v}] = r_{\frac{\pi}{2}}(\vec{u}) \cdot \vec{v}$.

Exercice 42

Dans le plan muni d'une base orthonormale directe, on considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Faire une figure. Déterminer la mesure de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) .

Exercice 43 (★)

On considère un triangle ABC tel que $BC = 4$, $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{4}$ et $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$. Faire une figure. Calculer les longueurs AB et AC .

Exercice 44 (★★)

On considère un triangle, on appelle a , b et c les longueurs de ses côtés et γ la mesure de l'angle opposé au côté de longueur c . Exprimer $\cos \gamma$ en fonction de a , b et c . En déduire $(\sin \gamma)^2$ sous forme factorisée. Exprimer l'aire du triangle en fonction de a , b et c .

Exercice 45 (★★)

On considère un triangle, on appelle a , b et c les longueurs de ses côtés et α , β et γ les mesures des angles respectivement opposés aux côtés de longueurs a , b et c .

$$\text{Démontrer que } \frac{\frac{a-b}{2}}{\frac{a+b}{2}} = \frac{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Exercice 46

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère le point $A(2; -1)$, la droite \mathcal{D}_1 d'équation cartésienne $3x - 2y + 5 = 0$ ainsi que la droite \mathcal{D}_2 perpendiculaire à \mathcal{D}_1 passant par A . Faire une figure. Déterminer une équation cartésienne de la droite \mathcal{D}_2 .

Exercice 47

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la droite \mathcal{D} passant par le point $A(-1; 3)$ et admettant $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Faire une figure. Déterminer un paramétrage de la droite \mathcal{D} .

Exercice 48

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(3; 4)$, $B(1; 2)$ et $C(5; 1)$. Dans le triangle ABC , on note \mathcal{D}_1 la hauteur issue de A , \mathcal{D}_2 la hauteur issue de B et \mathcal{D}_3 la hauteur issue de C . Faire une figure. Déterminer une équation cartésienne des droites \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 . En déduire les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC .

Exercice 49

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(3; 4)$, $B(1; 2)$ et $C(5; 1)$. Dans le triangle ABC , on note \mathcal{D}_1 la médiatrice de $[BC]$, \mathcal{D}_2 la médiatrice de $[AC]$ et \mathcal{D}_3 la médiatrice de $[AB]$. Faire une figure. Déterminer une équation cartésienne des droites \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 . En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

Exercice 50

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère le point $A(2; 1)$ ainsi que la droite \mathcal{D} d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$. Faire une figure. Déterminer la distance du point A à la droite \mathcal{D} .

Exercice 51

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère le point $M(5; -2)$, la droite \mathcal{D} d'équation cartésienne $3x - 2y + 5 = 0$ ainsi que le point H projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} . Faire une figure. Calculer les coordonnées du point H .

Exercice 52

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(3; 1)$ et $B(-2; 2)$ ainsi que le cercle \mathcal{C} de centre A passant par B . Faire une figure. Déterminer une équation cartésienne du cercle \mathcal{C} .

Exercice 53

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(3; 2)$, $B(-1; -2)$ et $\Omega(2; -1)$ ainsi que la droite (AB) et le cercle \mathcal{C} de centre Ω et de rayon 2. Faire une figure. Déterminer l'intersection de la droite (AB) et du cercle \mathcal{C} .

Exercice 54 (★★)

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(3; 1)$, $B(6; 5)$ et $C(2; -2)$ ainsi que le cercle de diamètre $[AB]$ et ses tangentes \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 passant par le point C . Faire une figure. Déterminer une équation cartésienne de \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 .

Exercice 55

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la transformation $t : M(x; y) \mapsto M'(x-2; y+4)$. Faire une figure en considérant quelques points et leur images par t . Montrer que t est une translation de vecteur \vec{u} dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 56

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la transformation $s : M(x; y) \mapsto M'(-x-2; 4-y)$. Faire une figure en considérant quelques points et leur images par s . Montrer que s est une symétrie centrale et déterminer son centre.

Exercice 57

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $I(-1; 2)$ et $M(x; y)$. Déterminer en fonction de x et de y les coordonnées $(x'; y')$ de l'image M' du point M par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 58 (★★)

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(-1; -3)$, $B(2; 1)$ et $M(x; y)$. Faire une figure. Déterminer en fonction de x et de y les coordonnées du projeté orthogonal H du point M sur la droite (AB) , en déduire les coordonnées $(x'; y')$ du point M' image du point M par la réflexion d'axe (AB) .

Exercice 59

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $I(-1; 3)$ et $M(x; y)$. Déterminer en fonction de x et de y les coordonnées $(x'; y')$ de l'image M' du point M par l'homothétie de centre I et de rapport -2 .

Exercice 60 (★)

On considère un segment $[AB]$ du plan. Montrer qu'il existe une unique homothétie h de rapport -2 qui transforme A en B et déterminer son centre.

Exercice 61 (★★)

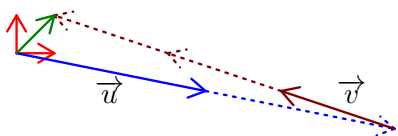
Dans le plan complexe, on considère les points M , N , M' et N' d'affixes respectives $6+i$, $-3-2i$, $-2-i$ et $4+i$. Faire une figure. Montrer qu'il existe une unique homothétie h transformant M en M' et N en N' et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 62 (★★★)

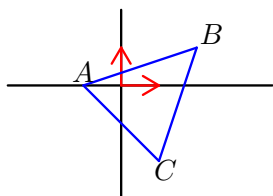
On considère l'application définie sur le plan complexe privé de O par l'écriture complexe $z' = \frac{1}{z}$. Déterminer l'image d'un cercle de rayon R de centre d'affixe ω ne passant pas par O par cette application.

Réponses

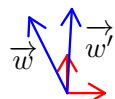
1) $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



2) Le triangle ABC est isocèle en B car $AB = BC = \sqrt{10}$.

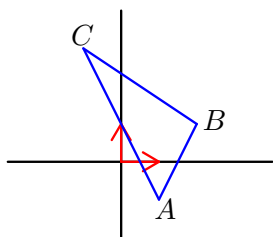


3) $\vec{w}' \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} + \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

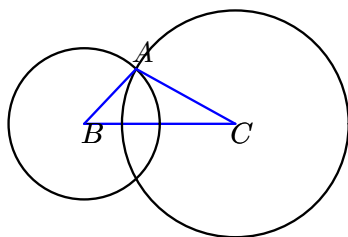


4) $\rho = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

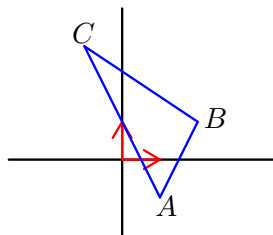
5) $\widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.



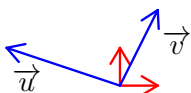
6) $\widehat{BAC} = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$, $\widehat{ABC} = \arccos\left(\frac{11}{16}\right)$ et $\widehat{ACB} = \arccos\left(\frac{7}{8}\right)$.



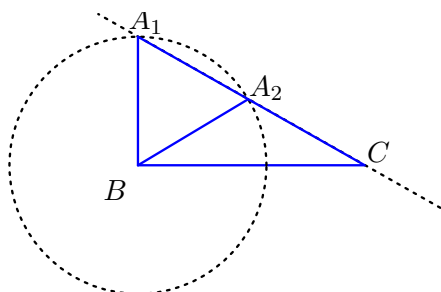
7) $A(ABC) = 4$.



8) $(\vec{u}, \vec{v}) = -\arccos(-\frac{1}{10}\sqrt{2})$.



9) $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ ou $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.



10) $(AB) : 3x + 4y - 11 = 0$.

11) $D_2 : 3x - 2y - 19 = 0$.

12) $(AB) : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$.

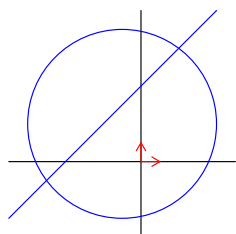
13) $(AB) : 5x - 2y - 1 = 0$ et $(CD) : 5x - 3y - 11 = 0$ se coupent au point de coordonnées $(-\frac{19}{5}; -10)$.

14) $d(M, D) = \frac{24}{\sqrt{13}}$.

15) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \iff (x - 2)^2 + (y - (-1))^2 = 3^2$.

16) $\begin{cases} x = -1 + 2 \cos t \\ y = 3 + 2 \sin t \end{cases}$.

17) $(-5; -1)$ et $(2; 6)$.



18) $x^2 + y^2 - 5y = 0$.

19) $A'(-5; 5)$.

20) $A'(1; -4)$.

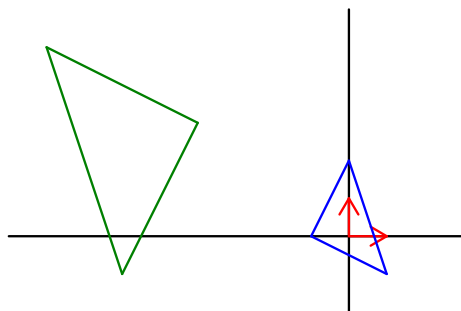
21) $A'(-2; 5)$.

22) $H(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ d'où $A'(-2; -1)$.

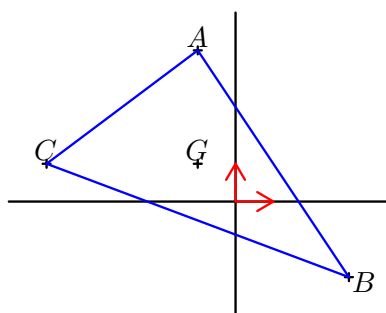
23)



24) $A'(-6; -1)$, $B'(-8; 5)$ et $C'(-4; 3)$.



25) $G(-1; 1)$.



26) $\vec{i} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ et $\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$.

27) $\vec{OM} = 2\vec{i} + 2\vec{j} = 2\vec{u} + 0\vec{v}$.

28) On montre en utilisant la relation de Chasles que si I est le milieu de $[AB]$ alors $\vec{IG} = \frac{1}{3}\vec{IC}$ d'où G appartient à la médiane issue de C .

29) On a $z_{\vec{u}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}(3 - 2i) = \left(-\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right) + \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$.

30) $\vec{u}' = -y\vec{i} + x\vec{j}$.

31) On a $\vec{i} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ et $\vec{j} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{v}$.

32) Les coordonnées polaires du point M sont $\rho = 10$ et $\theta = -\frac{5\pi}{6}$.

33) Les coordonnées polaires du point M sont $\rho = 4 - 2\sqrt{3}$ et $\theta = -\frac{2\pi}{3}$.

34) $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(1; 1)$, $D(0; 1)$, $I(1; \frac{1}{2})$, $J(\frac{2}{3}; 1)$, $K(\frac{1}{4}; 0)$, le triangle IJK est rectangle en I .

35) $\widehat{AOB} = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

36) On a $\|2\vec{u} + 3\vec{v}\|^2 - \|3\vec{u} + 2\vec{v}\|^2 = 5(\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2)$.

37) On remarque que $MA^2 + MB^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$ avec I milieu de $[AB]$, le lieu géométrique cherché est le cercle de diamètre $[AB]$.

38) $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$, $I(0; \frac{4}{3})$, $J(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $K(\frac{4}{5}; 0)$, les points I , J et K sont alignés.

- 39) $\mathcal{A}(ABC) = \frac{17}{2}$.
- 40) $2[\vec{u}, \vec{v}]$.
- 41) On s'intéresse aux angles orientés $(\vec{u}, r_{\frac{\pi}{2}}(\vec{v}))$ et $(r_{\frac{\pi}{2}}(\vec{u}), \vec{v})$.
- 42) On a $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.
- 43) On montre que $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ d'où $AB = 2\sqrt{2}(3 - \sqrt{3})$ et $AC = 4(\sqrt{3} - 1)$.
- 44) L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$.
- 45) On utilise la formule d'addition pour la fonction tangente et on se ramène à la loi des sinus.
- 46) $\mathcal{D}_2 : 2x + 3y - 1 = 0$.
- 47) Un paramétrage de la droite \mathcal{D} est $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
- 48) $\mathcal{D}_1 : 4x - y - 8 = 0, \mathcal{D}_2 : 2x - 3y + 4 = 0, \mathcal{D}_3 : x + y - 6 = 0$ et $H\left(\frac{14}{5}; \frac{16}{5}\right)$.
- 49) $\mathcal{D}_1 : 8x - 2y - 21 = 0, \mathcal{D}_2 : 4x - 6y - 1 = 0, \mathcal{D}_3 : x + y - 5 = 0$ et $I\left(\frac{31}{10}; \frac{19}{10}\right)$.
- 50) La distance est $\frac{8}{\sqrt{13}}$.
- 51) $H\left(-\frac{7}{13}; \frac{22}{13}\right)$.
- 52) Le cercle \mathcal{C} admet pour équation cartésienne $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 26$.
- 53) La droite (AB) d'équation cartésienne $x - y - 1 = 0$ et le cercle \mathcal{C} d'équation cartésienne $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ admettent deux points d'intersection ayant pour coordonnées $(2; 1)$ et $(0; -1)$.
- 54) On appelle I le milieu du segment $[AB]$, les cercles de diamètres $[AB]$ et $[CI]$ admettent deux points d'intersection $M(6; 1)$ et $N(2; 3)$. On en déduit $\mathcal{T}_1 : 3x - 4y - 14 = 0$ et $\mathcal{T}_2 : x - 2 = 0$.
- 55) On montre que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- 56) On montre que le milieu du segment $[MM']$ a pour coordonnées $(-1; 2)$.
- 57) On obtient $M'(1 - y; x + 3)$.
- 58) On obtient $H\left(\frac{9}{25}x + \frac{12}{25}y + \frac{4}{5}; \frac{12}{25}x + \frac{16}{25}y - \frac{3}{5}\right)$ et $M'\left(-\frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y + \frac{8}{5}; \frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y - \frac{6}{5}\right)$.
- 59) On obtient $M'(-2x - 3; -2y + 9)$.
- 60) Le centre de l'homothétie h est le point Ω tel que $\overrightarrow{A\Omega} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
- 61) L'homothétie h a pour rapport $-\frac{2}{3}$ et son centre a pour affixe $\frac{6-i}{5}$.
- 62) Cercle de rayon $R' = \frac{R}{|\omega|^2 - R^2}$ et de centre d'affixe $\omega' = \frac{\omega}{|\omega|^2 - R^2}$.