

V. Équations différentielles

1 Primitive d'une fonction

Définition 1. On appelle **primitive** d'une fonction f une solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Exercice 1. Déterminer une solution de l'équation différentielle $y'(t) = 2t^3 - 2t + 5$ d'inconnue y de la variable t .

Remarque 1. On notera parfois abusivement $y' = 2t^3 - 2t + 5$ au lieu de $y'(t) = 2t^3 - 2t + 5$.

Lorsque nous aurons défini la notion de **continuité** et développé la théorie de l'**intégration**, nous pourrons démontrer le théorème suivant :

Théorème 1. Toute fonction f continue admet des primitives, si F_1 et F_2 sont deux primitives de la fonction f alors il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $F_2 = F_1 + k$.

Exercice 2. Déterminer les primitives sur \mathbb{R} de la fonction f définie par $f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$.

Exercice 3. Déterminer les primitives sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(t) = t\sqrt{t}$. (on pourra utiliser les fonctions puissances)

Exercice 4. Déterminer les primitives sur \mathbb{R} de la fonction f définie par $f(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$. En déduire que la fonction f admet une unique primitive F sur \mathbb{R} telle que $F(1) = 1$. Exprimer $F(t)$.

Exercice 5. Dériver la fonction $F : t \mapsto (a + bt)e^t$. Montrer qu'il existe des valeurs de a et b telles que $F'(t) = te^t$. En déduire les primitives sur \mathbb{R} de la fonction f définie par $f(t) = te^t$.

Exercice 6. Dériver la fonction $F : t \mapsto (a \cos t + b \sin t)e^t$. Montrer qu'il existe des valeurs de a et b telles que $F'(t) = (\sin t)e^t$. En déduire les primitives sur \mathbb{R} de la fonction f définie par $f(t) = (\sin t)e^t$.

2 Équations linéaires du premier ordre

Rappelons tout d'abord que nous avons défini la fonction exponentielle à partir d'une équation différentielle du premier ordre :

Définition 2. *L'équation différentielle $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ admet une unique solution sur \mathbb{R} , on l'appelle **fonction exponentielle** et on la note $t \mapsto \exp(t)$ ou $t \mapsto e^t$ avec $e = \exp(1)$.*

La fonction exponentielle va donc jouer un rôle fondamental dans la résolution des équations différentielles.

2.1 Équations linéaires du premier ordre sans second membre

Théorème 2. *On considère une fonction a continue sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , alors l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$ admet pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = \lambda e^{-A(t)}$ où A est une primitive de a sur I et λ un nombre réel ou complexe.*

Exercice 7. Résoudre les équations différentielles suivantes sur \mathbb{R} :

- $y' - 2y = 0$
- $y' + (1 + it)y = 0$
- $(t^2 + 1)y' + y = 0$

Propriété 1. *On considère une fonction a continue sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , alors l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$ avec la **condition initiale** $y(t_0) = \alpha$ admet une unique solution.*

Exercice 8. Résoudre l'équation différentielle $y' - \sqrt{t}y = 0$ sur $]0; +\infty[$ avec la condition initiale $y(1) = e$.

Exercice 9. Résoudre l'équation différentielle $y' = 0$ sur \mathbb{R} avec la condition initiale $y'(0) = -1$.

2.2 Équations linéaires du premier ordre avec second membre

La première méthode de résolution appelée **méthode de variation de la constante** consiste à chercher une solution de l'équation avec second membre sous une forme modifiée de la solution de l'équation sans second membre en remplaçant la constante multiplicative par une fonction :

Propriété 2. *On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , alors l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ admet pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = f(t)e^{-A(t)}$ où A est une primitive de a et f une primitive de la fonction be^A .*

Remarque 2. *La formule $f' = be^A$ n'est pas à connaître, en pratique on procède de la façon suivante :*

- On cherche la solution générale y_H de l'équation sans second membre associée.
- On remplace la constante de y_H par une fonction $f(t)$ afin d'obtenir la forme de la solution y de l'équation avec second membre.
- On dérive la forme précédente.
- On remplace y et y' dans l'équation différentielle, on constate que $f(t)$ disparaît et on obtient $f'(t)$.
- On en déduit f puis y .

Exercice 10. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{1}{t}y = t$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ en utilisant la méthode de variation de la constante.

La seconde méthode de résolution appelée **méthode de la solution particulière** consiste à chercher une solution particulière de l'équation avec second membre ce qui permet ensuite de se ramener à une équation sans second membre :

Théorème 3. On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , alors l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ admet pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = \tilde{y}(t) + y_H(t)$ où \tilde{y} est une solution particulière de l'équation différentielle et y_H la solution générale de l'équation différentielle sans second membre associée.

Exercice 11. On considère l'équation différentielle $(E) : y' + \frac{1}{t}y = t$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

- Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E) sous la forme $\tilde{y}(t) = mt^2$.
- En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) .

Propriété 3. On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , alors l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ avec la condition initiale $y(t_0) = \alpha$ admet une unique solution.

Exercice 12. On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = e^t$ sur \mathbb{R} .

- Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E) sous la forme $\tilde{y}(t) = me^t$.
- En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) .
- Résoudre l'équation différentielle $y' + y = e^t$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

Le **principe de superposition** peut être utile lors de la recherche d'une solution particulière :

Propriété 4. On considère trois fonctions a , b_1 et b_2 continues sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Si y_1 est une solution de l'équation différentielle $(E_1) : y' + ay = b_1$ et y_2 une solution de l'équation différentielle $(E_2) : y' + ay = b_2$ alors $y_1 + y_2$ est une solution de l'équation différentielle $(E) : y' + ay = b_1 + b_2$.

Exercice 13. On considère l'équation différentielle $(E) : y' - y = 2 \cos(t)$ sur \mathbb{R} .

- Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y' - y = e^{it}$ sous la forme $\tilde{y}_1(t) = me^{it}$.
- Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y' - y = e^{-it}$ sous la forme $\tilde{y}_2(t) = me^{-it}$.
- En déduire une solution particulière \tilde{y} de l'équation différentielle (E) .
- Résoudre l'équation différentielle (E) .

3 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

3.1 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre

Théorème 4. On considère trois nombres a , b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$ et on note $\Delta = b^2 - 4ac$, alors l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ admet pour solutions les fonctions y définies par :

- Si $\Delta \neq 0$, $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ avec λ et μ des nombres réels ou complexes et r_1, r_2 les solutions de l'équation $ar^2 + br + c = 0$.
- Si $\Delta = 0$, $y(t) = (\lambda + \mu t)e^{r_0 t}$ avec λ et μ des nombres réels ou complexes et r_0 la solution double de l'équation $ar^2 + br + c = 0$.

Définition 3. L'équation du second degré associée à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est appelée **équation caractéristique**.

Exercice 14. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $y'' - 3y' + 2y = 0$
- $y'' + 2y' + y = 0$
- $y'' + 2iy' - 2y = 0$

Propriété 5. On considère trois nombres a, b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$, alors l'équation différentielle $ay'' + by' + c = 0$ avec la condition initiale $y(t_0) = \alpha$ et $y'(t_0) = \beta$ admet une unique solution.

Exercice 15. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 5y' + 6y = 0$ avec la condition initiale $y(0) = 5$ et $y'(0) = 12$.

Théorème 5. On considère trois nombres a, b et c réels avec $a \neq 0$ et on note $\Delta = b^2 - 4ac$, alors l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ admet pour solutions à valeurs réelles les fonctions y définies par :

- Si $\Delta = 0$, $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{r_0 t}$ avec λ et μ des nombres réels et r_0 la solution double de l'équation $ar^2 + br + c = 0$.
- Si $\Delta > 0$, $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ avec λ et μ des nombres réels et r_1, r_2 les solutions de l'équation $ar^2 + br + c = 0$.
- Si $\Delta < 0$, $y(t) = \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t\right) \right) e^{-\frac{b}{2a}t}$ avec A et B des nombres réels.

Exercice 16. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 5y = 0$ où y est une fonction à valeurs réelles.

Corollaire 1. Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega \in]0; +\infty[$ et y une fonction à valeurs dans \mathbb{R} sont les fonctions y définies par $y(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ avec A et B des nombres réels.

Exercice 17. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y = 0$ où y est une fonction à valeurs réelles.

3.2 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre

La **méthode de variation de la constante** permet de se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

Propriété 6. On considère trois nombres a, b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$ et une fonction d continue sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , alors l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(t)$ admet pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = f(t)e^{rt}$ où r est une solution de l'équation $ar^2 + br + c = 0$ et f une primitive d'une solution de l'équation différentielle $y' + \left(2r + \frac{b}{a}\right)y = \frac{1}{a}d(t)e^{-rt}$.

Remarque 3. L'équation différentielle $y' + \left(2r + \frac{b}{a}\right)y = \frac{1}{a}d(t)e^{-rt}$ n'est pas à connaître, en pratique il faut exprimer y sous la forme $y(t) = f(t)e^{rt}$, dériver deux fois puis remplacer dans l'équation différentielle afin d'obtenir une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f' .

Exercice 18. On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 2$ sur \mathbb{R} .

- Déterminer les solutions de l'équation sans second membre associée à (E).
- On pose $y(t) = f(t)e^{-t}$. Calculer $y'(t)$ puis $y''(t)$, remplacer dans l'équation différentielle (E) et en déduire l'équation différentielle vérifiée par f' .
- En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

La **méthode de la solution particulière** permet de se ramener à une équation différentielle sans second membre :

Théorème 6. On considère trois nombres a, b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$ et une fonction d continue sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , alors l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(t)$ admet pour solutions les fonctions y définies par $y(t) = \tilde{y}(t) + y_H(t)$ où \tilde{y} est une solution particulière de l'équation différentielle et y_H la solution générale de l'équation différentielle sans second membre associée.

Exercice 19. On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + y = 2$ sur \mathbb{R} .

- Déterminer une solution particulière \tilde{y} de l'équation différentielle (E) sous la forme d'une fonction constante.
- En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) .

Propriété 7. On considère trois nombres a, b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$ et une fonction d continue sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , alors l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(t)$ avec la condition initiale $y(t_0) = \alpha$ et $y'(t_0) = \beta$ admet une unique solution.

Exercice 20. On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 6y' + 8y = e^t$ sur \mathbb{R} .

- Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E) sous la forme $\tilde{y}(t) = me^t$.
- En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) .
- Résoudre l'équation différentielle $y'' - 6y' + 8y = e^t$ avec la condition initiale $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

Le principe de superposition peut être utile lors de la recherche d'une solution particulière :

Propriété 8. On considère trois nombres a, b et c réels ou complexes avec $a \neq 0$ et deux fonctions d_1 et d_2 continues sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Si y_1 est une solution de l'équation différentielle $(E_1) : ay'' + by' + cy = d_1$ et y_2 une solution de l'équation différentielle $(E_2) : ay'' + by' + cy = d_2$ alors $y_1 + y_2$ est une solution de l'équation différentielle $(E) : ay'' + by' + cy = d_1 + d_2$.

Exercice 21. On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + y' + y = 3 \cos t - 2 \sin t$ sur \mathbb{R} dans laquelle y est à valeurs réelles.

- Exprimer $3 \cos t - 2 \sin t$ sous la forme $C_1 e^{it} + C_2 e^{-it}$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ en utilisant les formules d'Euler.
- Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y' + y = (\frac{3}{2} + i)e^{it}$ sous la forme $\tilde{y}_1(t) = me^{it}$.
- Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + y' + y = (\frac{3}{2} - i)e^{-it}$ sous la forme $\tilde{y}_2(t) = me^{-it}$.
- En déduire une solution particulière \tilde{y} de l'équation différentielle (E) .
- Résoudre l'équation différentielle (E) .

Remarque 4. Dans l'exercice précédent, il est plus rapide de chercher directement une solution particulière de l'équation différentielle (E) sous la forme $\tilde{y}(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$.

Exercices supplémentaires**Exercice 22**

Déterminer les primitives sur \mathbb{R} de la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1 + 4t^2}$.

Exercice 23

Déterminer les primitives sur \mathbb{R} de la fonction $f : t \mapsto 2 \cos(3t) - 3 \sin(2t)$.

Exercice 24

Déterminer les primitives sur \mathbb{R} de la fonction $f : t \mapsto t^2(t^3 + 1)^3$.

Exercice 25

Déterminer les primitives sur \mathbb{R} de la fonction $f : t \mapsto \frac{t}{(t^2 + 1)^2}$.

Exercice 26 (★)

Déterminer les primitives sur \mathbb{R} de la fonction $f : t \mapsto \frac{1 - t}{1 + t^2}$.

Exercice 27

Déterminer les primitives sur $]0; +\infty[$ de la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t}$.

Exercice 28 (★★)

Déterminer les primitives sur $]0; +\infty[$ de la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$.

Exercice 29 (★★)

Déterminer les primitives sur \mathbb{R} de la fonction $f : t \mapsto \frac{e^t - 1}{e^t + 1}$.

Exercice 30 (★)

Déterminer les primitives sur \mathbb{R} de la fonction $f : t \mapsto t^2 e^t$.
(on pourra chercher $F(t)$ sous la forme $F(t) = (at^2 + bt + c)e^t$)

Exercice 31 (★)

Déterminer les primitives sur \mathbb{R} de la fonction $f : t \mapsto (2 \cos t - 3 \sin t)e^{-t}$.
(on pourra chercher $F(t)$ sous la forme $F(t) = (a \cos t + b \sin t)e^{-t}$)

Exercice 32

Résoudre l'équation différentielle $y' - \sin(3t)y = 0$ sur \mathbb{R} .

Exercice 33

Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}y = 0$ sur $] - 1; 1[$ avec la condition initiale $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

Exercice 34

Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{t}y = t$ sur l'intervalle $] - \infty; 0[$ au moyen de la méthode de variation de la constante.

Exercice 35

Résoudre l'équation différentielle $y' - y = te^t$ sur \mathbb{R} au moyen de la méthode de variation de la constante.

Exercice 36

Résoudre l'équation différentielle $y' + 2ty = t$ sur \mathbb{R} .

(on pourra chercher une solution particulière \tilde{y} sous la forme d'un fonction constante)

Exercice 37

Résoudre l'équation différentielle $(t^2 + 1)y' + y = 1$ sur \mathbb{R} .

(on pourra chercher une solution particulière \tilde{y} sous la forme d'un fonction constante)

Exercice 38

Résoudre l'équation différentielle $y' + y = t^2$ sur \mathbb{R} .

(on pourra chercher une solution particulière \tilde{y} sous la forme d'un fonction trinôme du second degré)

Exercice 39 (★)

Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 2 \cos(t)$ sur \mathbb{R} .

Exercice 40 (★)

Résoudre l'équation différentielle $(t^2 + 1)y' + ty = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$ sur \mathbb{R} .

Exercice 41 (★)

Résoudre l'équation différentielle $(e^t + 1)y' + e^t y = e^t - 1$ sur \mathbb{R} .

Exercice 42 (★)

Résoudre l'équation différentielle $\cos(t) y' - \sin(t) y = 1$ sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

Exercice 43 (★★)

Résoudre l'équation différentielle $y' - \tan(t) y = \frac{1}{\cos(t) + 1}$ sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

Exercice 44 (★★)

Résoudre l'équation différentielle $(t - 1)^2 y' + (t - 2)y = 0$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Exercice 45

Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = 0$ sur \mathbb{R} .

Exercice 46

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$ sur \mathbb{R} .

Exercice 47

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$ sur \mathbb{R} où y est à valeurs réelles.

Exercice 48

Résoudre l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = 0$ sur \mathbb{R} avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 49

Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = e^t$ sur \mathbb{R} au moyen de la méthode de variation de la constante.

Exercice 50

Résoudre l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = e^t$ sur \mathbb{R} .

Exercice 51 (★)

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' - 3y = 1 - 2t - 3t^2$ sur \mathbb{R} .

Exercice 52 (★)

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = te^{2t}$ sur \mathbb{R} .

Exercice 53 (★)

Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = e^t + e^{-t}$ sur \mathbb{R} où y est à valeurs réelles.

Exercice 54

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 9y = 5 \cos(2t)$ sur \mathbb{R} avec les conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = 2$.

Exercice 55 (★)

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 5y = \cos(t) e^{-2t}$ sur \mathbb{R} .

Exercice 56 (★★★)

On considère deux solutions y_1 et y_2 d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sans second membre $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$. Montrer que $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on déterminera.

Réponses

- 1) $y(t) = \frac{1}{2}t^4 - t^2 + 5t.$
- 2) $F(t) = \arctan t + Cte.$
- 3) $F(t) = \frac{2}{5}t^2\sqrt{t} + Cte.$
- 4) $F(t) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{t^2+1}{2}\right) + 1.$
- 5) $F(t) = (t-1)e^t.$
- 6) $F(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)e^t.$
- 7) $y(t) = \lambda e^{2t}$, $\lambda(\cos \frac{t^2}{2} - i \sin \frac{t^2}{2})e^{-t}$, $\lambda e^{-\arctan t}.$
- 8) $y(t) = e^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}t\sqrt{t}}.$
- 9) aucune solution.
- 10) $f'(t) = t^2$ d'où $y(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{Cte}{t}.$
- 11) $\tilde{y}(t) = \frac{1}{3}t^2$ d'où $y(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{Cte}{t}.$
- 12) $y(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}).$
- 13) $\tilde{y}_1(t) = -\frac{1}{2}(1+i)e^{it}$ et $\tilde{y}_2(t) = \frac{1}{2}(-1+i)e^{-it}$ d'où $\tilde{y}(t) = -\cos t + \sin t$ et $y(t) = -\cos t + \sin t + \lambda e^t.$
- 14) $y(t) = \lambda e^t + \mu e^{2t}$, $(\lambda + \mu t)e^{-t}$, $\lambda e^{(1-i)t} + \mu e^{(-1-i)t}.$
- 15) $y(t) = 3e^{2t} + 2e^{3t}.$
- 16) $y(t) = (A \cos t + B \sin t)e^{-2t}.$
- 17) $y(t) = A \cos(\sqrt{2}t) + B \sin(\sqrt{2}t).$
- 18) f' vérifie l'équation différentielle $y' = 2e^t$ d'où $y(t) = 2 + (\lambda + \mu t)e^{-t}.$
- 19) $\tilde{y}(t) = 2$ d'où $y(t) = 2 + (\lambda + \mu t)e^{-t}.$
- 20) $y(t) = \frac{1}{3}e^t + \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{4t}.$
- 21) $\tilde{y}_1(t) = (1 - \frac{3}{2}i)e^{it}$ et $\tilde{y}_2(t) = (1 + \frac{3}{2}i)e^{-it}$ d'où $\tilde{y}(t) = 2 \cos t + 3 \sin t$ et $y(t) = 2 \cos t + 3 \sin t + (A \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + B \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t))e^{-\frac{1}{2}t}.$
- 22) $F(t) = \frac{1}{2}\arctan(2t) + Cte.$
- 23) $F(t) = \frac{2}{3}\sin(3t) + \frac{3}{2}\cos(2t) + Cte.$
- 24) $F(t) = \frac{1}{12}(t^3 + 1)^4 + Cte.$
- 25) $F(t) = \frac{-1}{2(t^2+1)} + Cte.$
- 26) $F(t) = \arctan t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + Cte.$
- 27) $F(t) = \frac{1}{2}(\ln t)^2 + Cte.$
- 28) $F(t) = -\frac{1}{t} - \frac{\ln t}{t} + Cte.$
- 29) $F(t) = -t + 2 \ln(e^t + 1) + Cte.$
- 30) $F(t) = (t^2 - 2t + 2)e^t + Cte.$
- 31) $F(t) = (\frac{1}{2}\cos t + \frac{5}{2}\sin t)e^{-t} + Cte.$
- 32) $y(t) = \lambda e^{-\frac{1}{3}\cos(3t)}.$
- 33) $y(t) = e^{\arccos(t) - \frac{\pi}{3}}.$
- 34) $y(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{Cte}{t}.$
- 35) $y(t) = \left(\frac{t^2}{2} + \lambda\right)e^t.$

$$36) y(t) = \frac{1}{2} + \lambda e^{-t^2}.$$

$$37) y(t) = 1 + \lambda e^{-\arctan(t)}.$$

$$38) y(t) = t^2 - 2t + 2 + \lambda e^{-t}.$$

$$39) y(t) = \cos t + \sin t + \lambda e^{-t}.$$

$$40) y(t) = \frac{\arctan(t) + \lambda}{\sqrt{t^2 + 1}}.$$

$$41) y(t) = \frac{e^t - t + \lambda}{e^t + 1}.$$

$$42) y(t) = \frac{t + \lambda}{\cos t}.$$

$$43) y(t) = \frac{t - \tan \frac{t}{2} + \lambda}{\cos t} \text{ en remarquant que } \frac{\cos t}{\cos t + 1} = 1 - \frac{1}{2(\cos \frac{t}{2})^2}.$$

$$44) y(t) = \frac{\lambda e^{-\frac{1}{t-1}}}{t-1} \text{ en remarquant que } \frac{t-2}{(t-1)^2} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{(t-1)^2}.$$

$$45) y(t) = \lambda e^t + \mu e^{-2t}.$$

$$46) y(t) = (\lambda + \mu t)e^t.$$

$$47) y(t) = (A \cos t + B \sin t)e^t.$$

$$48) y(t) = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t}.$$

$$49) y(t) = \lambda e^{-2t} + \mu e^t + \frac{1}{3}te^t.$$

$$50) y(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{2t} - \frac{1}{2}e^t.$$

$$51) y(t) = \frac{5}{3} + 2t + t^2 + \lambda e^t + \mu e^{-3t}.$$

$$52) y(t) = \left(\lambda + \mu t + \frac{t^3}{6} \right) e^{2t}.$$

$$53) y(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} + \lambda \cos t + \mu \sin t.$$

$$54) y(t) = \cos(2t) + \cos(3t) + \frac{2}{3}\sin(3t).$$

$$55) y(t) = \left(\left(\frac{t}{2} + \lambda \right) \sin t + \mu \cos t \right) e^{-2t} \text{ en remarquant que } \cos t \text{ est la partie réelle de } e^{it}.$$

$$56) a(t)w' + b(t)w = 0.$$