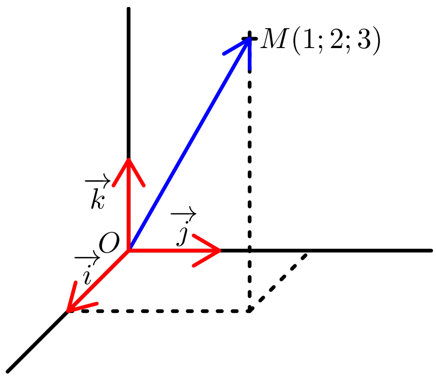
VI. Géométrie de l'espace

1 Repérage dans l'espace

Définition 1. *On appelle* **base** *de l'espace un triplet* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *avec* $\vec{i}$, $\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ *trois vecteurs non coplanaires de l'espace. Tout vecteur* $\vec{u}$ *de l'espace s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs* $\vec{i}$, $\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ *sous la forme* $\vec{u} = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j} + \nu\vec{k}$ *avec* λ, μ *et* ν *des nombres réels. Les nombres* λ, μ *et* ν *sont appelés* **coordonnées** *du vecteur* $\vec{u}$ *dans la base* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *le nombre* λ *est appelé* **abscisse** *du vecteur* $\vec{u}$ *dans la base* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *le nombre* μ *est appelé* **ordonnée** *du vecteur* $\vec{u}$ *dans la base* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *et le nombre* ν *est appelé* **cote** *du vecteur* $\vec{u}$ *dans la base* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. *On note* $\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}$.

Remarque 1. *Dans la base* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *on a* $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ *et* $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Définition 2. *On appelle* **repère cartésien** *de l'espace un quadruplet* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *avec* O *un point du plan et* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *une base de l'espace. Le point* O *est appelé* **origine** *du repère, la droite* $(O, \vec{i})$ *est appelée* **axe des abscisses**, *la droite* $(O, \vec{j})$ *est appelée* **axe des ordonnées** *et la droite* $(O, \vec{k})$ *est appelée* **axe des cotes**. *Si les vecteurs* $\vec{i}$, $\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ *sont orthogonaux deux à deux, le repère est dit* **orthogonal** *si de plus ils sont de même norme alors le repère est dit* **orthonormal**. *Tout point* M *de l'espace est repéré de manière unique par trois nombres* x, y *et* z *tels que* $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. *Les nombres* x, y *et* z *sont appelés* **coordonnées** *du point* M *dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *le nombre* x *est appelé* **abscisse** *du point* M *dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *le nombre* y *est appelé* **ordonnée** *du point* M *dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *et le nombre* z *est appelé* **cote** *du point* M *dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. *On note* $M(x; y; z)$.



Remarque 2. *On admet que l'espace tout comme le plan peut être orienté, on utilisera la règle du* bonhomme d'Ampère *ou du* tire-bouchon de Maxwell *pour définir une* **base orthonormale directe**.

2 Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte dans l'espace

2.1 Produit scalaire

Définition 3. *On appelle* **produit scalaire** *de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace :*

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) & si\ \vec{u} \neq \vec{0}\ et\ \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & si\ \vec{u} = \vec{0}\ ou\ \vec{v} = \vec{0} \end{cases}}$$

Remarque 3. *On ne peut pas définir la notion d'angle orienté de deux vecteurs non nuls dans l'espace.*

Remarque 4. *Le produit scalaire est symétrique car* $\boxed{\vec{v}.\vec{u} = \vec{u}.\vec{v}}$.

Remarque 5. *Le produit scalaire est nul si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.*

Propriété 1. *Dans l'espace muni d'une base orthonormale, on considère deux vecteurs* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, *alors :*

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$$

Propriété 2. **Bilinéarité du produit scalaire**

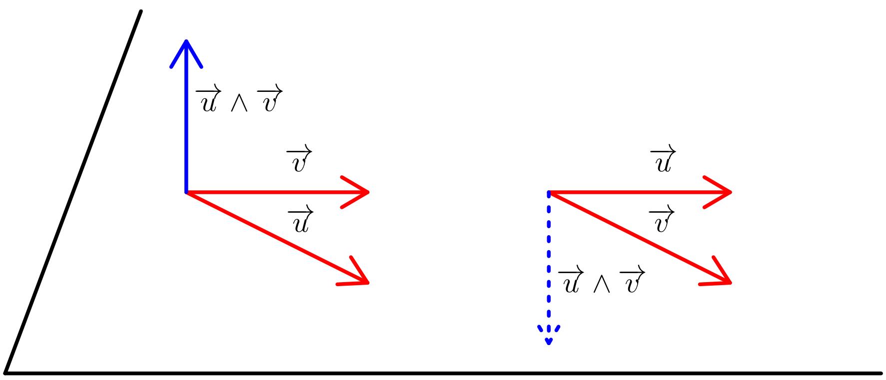
On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace et deux nombres réels λ et μ, alors :

$$\boxed{(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}).\vec{w} = \lambda(\vec{u}.\vec{w}) + \mu(\vec{v}.\vec{w})}$$

2.2 Produit vectoriel

Définition 4. *On appelle* **produit vectoriel** *de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :*

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ *si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.*
- *le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe et $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.*



Remarque 6. *Le produit vectoriel est antisymétrique car* $\boxed{\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}}$.

Remarque 7. *Le produit vectoriel est nul si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.*

Remarque 8. *Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale directe de l'espace alors $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$.*

Exercice 1. *On considère une base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, calculer $(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j}$ et $\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j})$.*

Propriété 3. Bilinéarité du produit vectoriel

On considère trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace et deux nombres réels λ et μ, alors :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \wedge (\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) + \mu(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w})}$$

Propriété 4. *Dans l'espace muni d'une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors :*

$$\boxed{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (yz' - zy')\overrightarrow{i} + (zx' - xz')\overrightarrow{j} + (xy' - yx')\overrightarrow{k}}$$

Exercice 2. *Dans l'espace muni d'une base orthonormale directe, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.*

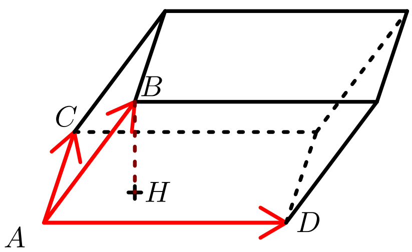
2.3 Produit mixte

Définition 5. *On appelle* **produit mixte** *de trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace :*

$$\boxed{[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})}$$

Remarque 9. *Le produit mixte est nul si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.*

Propriété 5. *On considère quatre points A, B, C et D non coplanaires de l'espace et on note H le projeté orthogonal du point B sur le plan (ACD), alors $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = [\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \pm HB \times ||\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}||$.*



Exercice 3. *On considère une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de l'espace, calculer $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$.*

Propriété 6. *Dans l'espace muni d'une base orthonormale directe, on considère trois vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$, alors :*

$$\boxed{[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = (xy'z'' + yz'x'' + zx'y'') - (zy'x'' + xz'y'' + yx'z'')}$$

Propriété 7. Antisymétrie du produit mixte
On considère trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace, alors :

$$\boxed{[\overrightarrow{u},\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}]=-[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]\quad ; \quad [\overrightarrow{v},\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}]=-[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]\quad ;\quad [\overrightarrow{w},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}]=-[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]}$$

Exercice 4. *Montrer que* $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})=(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$.

Propriété 8. Trilinéarité du produit mixte

On considère quatre vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace et deux nombres réels λ et μ, alors :

$$\boxed{[\lambda\overrightarrow{u_1}+\mu\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=\lambda[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]+\mu[\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]}$$

Exercice 5. *Simplifier* $[\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]$.

3 Droites, plans et sphères de l'espace

3.1 Plans

Exercice 6. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer les ensembles de points $M(x;y;z)$ associés aux équations $(E_1)\ :\ x=0$, $(E_2)\ :\ y-1=0$ et $(E_3)\ :\ x-y=0$.*

Propriété 9. Équation cartésienne d'un plan

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, les coordonnées $(x;y;z)$ des points d'un plan $\mathcal{P}$ vérifient une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec a, b, c et d des nombres réels et $(a;b;c)\neq(0;0;0)$, cette équation est appelée une **équation cartésienne** *du plan $\mathcal{P}$.*

Réciproquement, l'ensemble des points de coordonnées $(x;y;z)$ vérifiant une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec a, b, c et d des nombres réels et $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ est un plan.

Exercice 7. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(2;1;1)$, $B(3;2;2)$ et $C(1;-1;-3)$ ainsi qu'un point $M(x;y;z)\in(ABC)$. Calculer $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AM}]$, en déduire une équation cartésienne du plan (ABC).*

Propriété 10. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ avec a, b, c et d des nombres réels et $(a;b;c)\neq(0;0;0)$. Alors le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un* **vecteur normal** *au plan $\mathcal{P}$.*

Remarque 10. *Dans le cas où le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normé ($a^2+b^2+c^2=1$), l'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ est appelée* **équation normale** *du plan $\mathcal{P}$.*

Exercice 8. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $3x-2y+5z=4$, le point $A(-1;3;2)$ et le plan $\mathcal{P}_2$ passant par A et parallèle au plan $\mathcal{P}_1$. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$.*

Propriété 11. Paramétrage d'un plan

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal on considère un plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et admettant $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{u}} \\ y_{\overrightarrow{u}} \\ z_{\overrightarrow{u}} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{v}} \\ y_{\overrightarrow{v}} \\ z_{\overrightarrow{v}} \end{pmatrix}$ pour vecteurs directeurs ($\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires). Alors le point $M(x; y; z)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si il existe $t_1 \in \mathbb{R}$ et $t_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & x_A & + & t_1 \; x_{\overrightarrow{u}} & + & t_2 \; x_{\overrightarrow{v}} \\ y & = & y_A & + & t_1 \; y_{\overrightarrow{u}} & + & t_2 \; y_{\overrightarrow{v}} \\ z & = & z_A & + & t_1 \; z_{\overrightarrow{u}} & + & t_2 \; z_{\overrightarrow{v}} \end{array}\right.$$

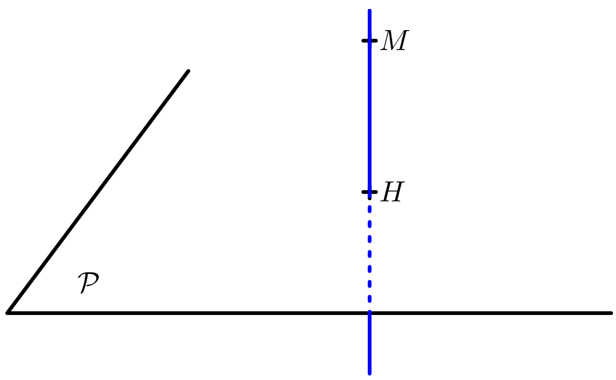
Cette écriture est appelée un **paramétrage** *du plan $\mathcal{P}$.*

Exercice 9. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer un paramétrage du plan passant par les points $A(1; 2; 3)$,$B(-1; 2; 1)$ et $C(5; 4; 3)$.*

Propriété 12. Distance d'un point à un plan

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère un plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c et d des nombres réels et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$. Alors la distance d'un point $M(x_M; y_M; z_M)$ au plan $\mathcal{P}$ est :

$$\boxed{\mathrm{d}(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$



Remarque 11. *La distance de l'origine du repère au plan $\mathcal{P}$ est $\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.*

Exercice 10. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer la distance du point $M(1; 1; 1)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x - 4y + 5z + 9 = 0$.*

3.2 Droites

Propriété 13. Paramétrage d'une droite

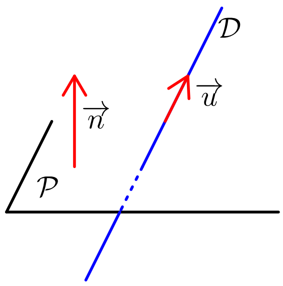
On considère une droite $\mathcal{D}$ de l'espace passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et admettant $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{u}} \\ y_{\overrightarrow{u}} \\ z_{\overrightarrow{u}} \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Alors le point $M(x; y; z)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & x_A & + & t \ x_{\overrightarrow{u}} \\ y & = & y_A & + & t \ y_{\overrightarrow{u}} \\ z & = & z_A & + & t \ z_{\overrightarrow{u}} \end{array}\right.$$

Cette écriture est appelée un **paramétrage** *de la droite $\mathcal{D}$.*

Exercice 11. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer un paramétrage de la droite passant par les points $A(1; 2; 3)$ et $B(3; 2; 1)$.*

Propriété 14. Intersection d'une droite et d'un plan
Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère une droite $\mathcal{D}$ admettant $\overrightarrow{u}$ pour vecteur directeur et un plan $\mathcal{P}$ admettant $\overrightarrow{n}$ pour vecteur normal. Alors l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$ est :
- *l'ensemble vide ou la droite $\mathcal{D}$ si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 0$.*
- *un point si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} \neq 0$.*



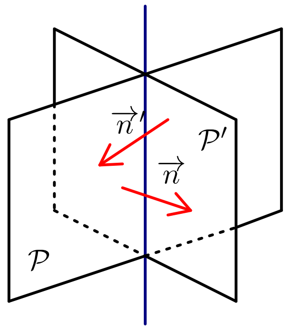
Exercice 12. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(-2; 3; 1)$, $B(-1; 2; 2)$, $C(1; 1; 1)$, $D(-2; 0; 2)$ et $E(-3; -1; 3)$ ainsi que le plan (ABC) et la droite (DE).*
- *Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).*
- *Déterminer un paramétrage de la droite (DE).*
- *Montrer que le plan (ABC) et la droite (DE) admettent un unique point d'intersection I.*
- *On note $(x; y; z)$ les coordonnées du point I. Remplacer x, y et z dans l'équation cartésienne du plan (ABC) en utilisant le paramétrage de la droite (DE) afin de déterminer les coordonnées du point I.*

Exercice 13. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ et $C(0; 0; 1)$.*
- *Représenter graphiquement le tétraèdre $OABC$.*
- *Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).*
- *Déterminer un paramétrage de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point O et perpendiculaire au plan (ABC).*
- *En déduire les coordonnées du projeté orthogonal H du point O sur le plan (ABC).*

Propriété 15. **Intersection de deux plans**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère un plan $\mathcal{P}$ admettant $\overrightarrow{n}$ pour vecteur normal et un plan $\mathcal{P}'$ admettant $\overrightarrow{n}'$ pour vecteur normal. Alors :

- *Si les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont colinéaires, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles ou confondus.*
- *Si les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ ne sont pas colinéaires, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite $\mathcal{D}$ admettant $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$ pour vecteur directeur.*



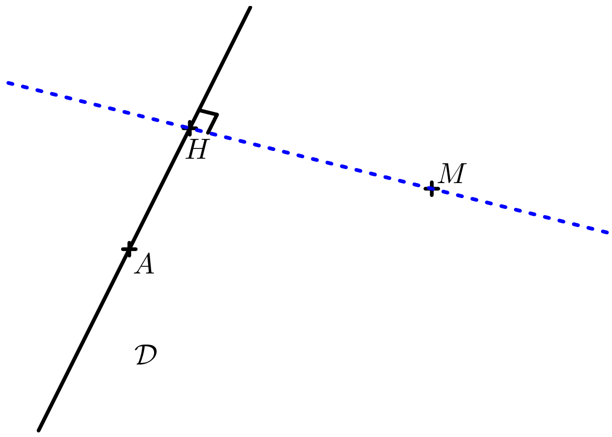
Exercice 14. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les plans $\mathcal{P} : 2x + 3y + z = 1$ et $\mathcal{P}' : x + y + z = 2$.*

— *Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite $\mathcal{D}$.*
— *Déterminer un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.*
— *Déterminer un point de la droite $\mathcal{D}$. (on pourra chercher un point de cote 0)*
— *En déduire un paramétrage de la droite $\mathcal{D}$.*

Propriété 16. **Distance d'un point à une droite**

Dans l'espace, on considère une droite $\mathcal{D}$ passant par le point A et admettant $\overrightarrow{u}$ pour vecteur directeur. Alors la distance d'un point M à la droite $\mathcal{D}$ est :

$$\boxed{\mathrm{d}(M, \mathcal{D}) = \frac{||\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}||}{||\overrightarrow{u}||}}$$



Exercice 15. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer la distance du point $M(1;1;1)$ à la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(1;6;3)$ et admettant $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.*

3.3 Sphères

Propriété 17. Équation cartésienne d'une sphère

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, les coordonnées $(x; y; z)$ *des points d'une sphère* $\mathcal{S}$ *de centre* $\Omega(x_\Omega; y_\Omega; z_\Omega)$ *et de rayon* R *vérifient une équation de la forme* $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2 = R^2$*, cette équation est appelée une* **équation cartésienne** *de la sphère* $\mathcal{S}$*.*

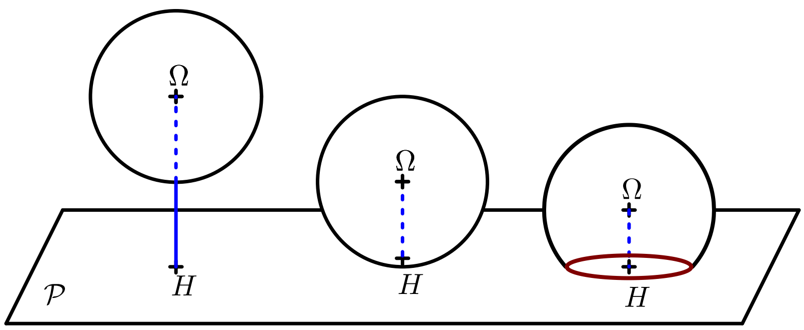
Réciproquement, l'ensemble des points de coordonnées $(x; y; z)$ *vérifiant une équation de la forme* $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2 = R^2$ *avec* x_ω*,* y_ω*,* z_ω *et* R *des nombres réels et* $R \geqslant 0$ *est une sphère* $\mathcal{S}$ *de centre* $\Omega(x_\Omega; y_\Omega; z_\Omega)$ *et de rayon* R*.*

Exercice 16. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, montrer que l'équation cartésienne* $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-10=0$ *est l'équation d'une sphère dont on déterminera le centre ainsi que le rayon.*

Propriété 18. Intersection d'un plan et d'une sphère

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère un plan $\mathcal{P}$ *ainsi qu'une sphère* $\mathcal{S}$ *de centre* Ω *et de rayon* $R > 0$*. Alors :*

- *Si* $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{P}) > R$*, le plan* $\mathcal{P}$ *et la sphère* $\mathcal{S}$ *n'ont aucun point d'intersection.*
- *Si* $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{P}) = R$*, le plan* $\mathcal{P}$ *et la sphère* $\mathcal{S}$ *ont un unique point d'intersection* H *qui est le projeté orthogonal de* Ω *sur* $\mathcal{P}$ *et le plan* $\mathcal{P}$ *est dit tangent en ce point à la sphère* $\mathcal{S}$*.*
- *Si* $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{P}) < R$*, l'intersection du plan* $\mathcal{P}$ *et de la sphère* $\mathcal{S}$ *est un cercle du plan* $\mathcal{P}$ *de centre* H *projeté orthogonal de* Ω *sur le plan* $\mathcal{P}$ *et de rayon* $r = \sqrt{R^2 - \mathrm{d}(\Omega, \mathcal{P})^2}$*.*



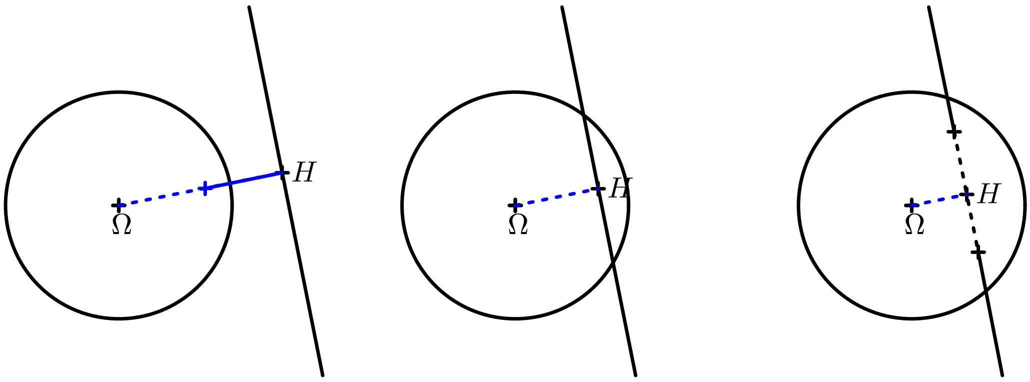
Exercice 17. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal on considère le plan* $\mathcal{P} : x+2y+3z=6$ *et la sphère* $\mathcal{S}$ *de centre* $\Omega(0; -1; -2)$ *et de rayon* 4*.*

— *Montrer que l'intersection du plan* $\mathcal{P}$ *et de la sphère* $\mathcal{S}$ *est un cercle.*
— *Déterminer le rayon* r *de ce cercle.*
— *Déterminer le centre* H *de ce cercle.*

Propriété 19. Intersection d'une droite et d'une sphère

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère une droite $\mathcal{D}$ ainsi qu'une sphère $\mathcal{S}$ de centre Ω et de rayon $R > 0$. Alors :

- *Si* $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) > R$*, la droite $\mathcal{D}$ et la sphère $\mathcal{S}$ n'ont aucun point d'intersection.*
- *Si* $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) = R$*, la droite $\mathcal{D}$ et la sphère $\mathcal{S}$ ont un unique point d'intersection H qui est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}$ et la droite $\mathcal{D}$ est dit tangente en ce point à la sphère $\mathcal{S}$.*
- *Si* $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) < R$*, la droite $\mathcal{D}$ et la sphère $\mathcal{S}$ ont deux points d'intersection symétriques par rapport au projeté orthogonal H de Ω sur $\mathcal{D}$.*



Exercice 18. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(-1; 3; 2)$, $B(1; 1; 2)$ et $C(-3; 2; 2)$ ainsi que la droite (AB) et la sphère $\mathcal{S}$ de centre C et de rayon 3.*

— *Montrer que la droite (AB) et la sphère $\mathcal{S}$ admettent deux points d'intersection I_1 et I_2.*
— *Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$.*
— *Déterminer un paramétrage de la droite (AB).*
— *On note $(x; y; z)$ les coordonnées d'un point d'intersection I de la droite (AB) et de la sphère $\mathcal{S}$. Remplacer x, y et z dans l'équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ en utilisant le paramétrage de la droite (AB) afin de déterminer les coordonnées des points I_1 et I_2.*

Propriété 20. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère deux points distincts A et B. Alors le point M appartient à la sphère de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.*

Exercice 19. *Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1; 2; 3)$ et $B(3; 2; 1)$. Déterminer une équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$.*

Exercices supplémentaires

Exercice 20

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;1;1)$, $B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $C(1;0;2)$.
Faire une figure puis montrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 21

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $O(0;0;0)$, $I(1;0;0)$, $J(0;1;0)$, $K(0;0;1)$, $A(1;1;0)$, $B(1;0;1)$, $C(0;1;1)$ et $D(1;1;1)$ ainsi que le cube $OIAJBDCK$.
Faire une figure, calculer les coordonnées du centre G du cube puis calculer l'angle géométrique $\widehat{AGD}$.

Exercice 22 ($\star$)

On considère deux vecteurs quelconques $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace. Exprimer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ en fonction de $||\overrightarrow{u}||$, $||\overrightarrow{v}||$ et $||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||$.

Exercice 23 ($\star\star$)

Dans l'espace, montrer que l'ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment est un plan orthogonal à ce segment et passant par son milieu.

Exercice 24

Dans l'espace, on considère deux points distincts A et B. Déterminer le lieu géométrique formé par les points M vérifiant $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{0}$.

Exercice 25

On considère une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ de l'espace, calculer $(\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{k})\wedge(\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{k})$.

Exercice 26 ($\star\star$)

On considère deux vecteurs orthogonaux $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace. Simplifier $\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$.

Exercice 27

Dans l'espace muni d'une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, déterminer $(\overrightarrow{j}+\overrightarrow{i})\wedge(\overrightarrow{j}-\overrightarrow{i})$.

Exercice 28

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $I(1;0;0)$, $J(0;1;0)$ et $K(0;0;1)$
Faire une figure puis calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{KI}\wedge\overrightarrow{KJ}$.

Exercice 29 ($\star\star$)

On considère trois vecteurs quelconques $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace.
Montrer que $\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})+\overrightarrow{v}\wedge(\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{u})+\overrightarrow{w}\wedge(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})=\overrightarrow{0}$.

Exercice 30

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;0;-1)$, $B(1;2;-1)$, $C(0;2;-1)$ et $D(1;2;2)$.

Faire une figure puis calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 31

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;1;\frac{3}{4})$, $B(1;0;\frac{1}{4})$, $C(\frac{1}{2};0;0)$ et $D(0;\frac{1}{2};0)$.

Faire une figure puis montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

Exercice 32 ($\star$)

On considère trois vecteurs quelconques $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace.

Exprimer $[\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}]$ en fonction de $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$.

Exercice 33 ($\star\star$)

On considère quatre vecteurs quelconques $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ de l'espace.

Montrer que $[\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v_3}] = 0$.

Exercice 34

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;1;0)$, $B(1;0;1)$ et $C(0;1;1)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice 35 ($\star$)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;2;3)$ et $B(3;2;1)$. Déterminer l'ensemble des points équidistants de A et B.

Exercice 36 ($\star\star$)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal on considère le plan $\mathcal{P} : x+2y+3z=4$. Déterminer une équation cartésienne du symétrique du plan $\mathcal{P}$ par rapport au plan xOy.

Exercice 37

Montrer que le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 2 & + & t_1 & + & 3\,t_2 \\ y & = & 1 & - & 2\,t_1 & & \\ z & = & -1 & + & t_1 & + & t_2 \end{array}\right.$ avec $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ est le paramétrage d'un plan et déterminer une équation cartésienne de celui-ci.

Exercice 38

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(0;-1;2)$, $B(1;0;1)$, $C(0;2;0)$, $D(1;-1;-1)$ et $E(2;-2;-2)$. Déterminer l'intersection du plan (ABC) et de la droite (DE).

Exercice 39

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point $A(1;1;1)$ sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x-4y+5z+21=0$. (on pourra commencer par chercher un paramétrage de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale à $\mathcal{P}$ passant par A)

Exercice 40 ($\star\star$)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère le projeté orthogonal $M'(x_{M'};y_{M'};z_{M'})$ d'un point $M(x_M;y_M;z_M)$ quelconque sur le plan d'équation cartésienne $x+y+z=0$.

Exprimer $x_{M'}$, $y_{M'}$ et $y_{M'}$ en fonction de x_M, y_M et z_M.

Exercice 41

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point $B(1;1;1)$ sur la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(1;6;3)$ et admettant $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.
(on pourra commencer par chercher une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ orthogonal à $\mathcal{D}$ passant par B)

Exercice 42

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;1;2)$, $B(1;2;3)$, $C(3;3;2)$, $D(3;2;3)$, $E(1;2;1)$ et $F(1;3;2)$. Déterminer l'intersection des plans (ABC) et (DEF).

Exercice 43 ($\star$)

Dans l'espace muni d'un repère orthogonal, on considère les points $A(1;2;3)$ et $B(4;4;4)$. Déterminer le symétrique du point $M(-3;1;3)$ par rapport à la droite (AB).

Exercice 44 ($\star$)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point $M(-2;4;0)$ sur la droite définie par le système d'équations cartésiennes $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$.

Exercice 45

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer l'intersection du plan d'équation cartésienne $x-y+z-11=0$ avec la sphère de centre $\Omega(1;-1;3)$ et de rayon $2\sqrt{3}$.

Exercice 46

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1;0;2)$, $B(1;2;0)$ et $C(1;-2;1)$. Déterminer l'intersection de la droite (AB) et de la sphère de centre C et de rayon 3.

Exercice 47 ($\star\star$)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(-2;6;0)$, $B(5;-1;0)$, $C(1;-2;3)$ et $D(-2;2;4)$. Déterminer une équation cartésienne de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

Exercice 48 ($\star\star$)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les cercles suivants :
$\mathcal{C}_1 : \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ y^2+z^2+2y-6z-11 & = & 0 \end{array}\right.$ $\quad\mathcal{C}_2 : \left\{\begin{array}{ccc} y & = & 0 \\ x^2+z^2-4x-6z-11 & = & 0 \end{array}\right.$.
Montrer qu'il existe une unique sphère contenant $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et déterminer son centre et son rayon.

Exercice 49 ($\star\star$)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, déterminer l'intersection de la sphère $\mathcal{S}_1$ de centre $\Omega_1(-3;1;-2)$ et de rayon $R_1=4\sqrt{3}$ avec la sphère $\mathcal{S}_2$ de centre $\Omega_2(2;6;3)$ et de rayon $R_2=3\sqrt{3}$.

Réponses

1) $\overrightarrow{0}$ et $-\overrightarrow{j}$.

2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) 1.

4) $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}] = [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$.

5) $-2[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$.

6) (E_1) : plan $(O, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, (E_2) : plan parallèle au plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$ passant par $A(0;1;0)$ et (E_3) : plan perpendiculaire au plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ passant par $A(0;0;0)$ et $B(1;1;0)$.

7) $-2x + 3y - z + 2 = 0$.

8) $3x - 2y + 5z = 1$.

9) $\begin{cases} x = 1 + t_1 + 2t_2 \\ y = 2 + t_2 \\ z = 3 + t_1 \end{cases}$.

10) $\frac{13}{10}\sqrt{2}$.

11) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - t \end{cases}$.

12) $I(0;2;0)$.

13) $H\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

14) $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -3 - t \\ z = -t \end{cases}$.

15) $\sqrt{5}$.

16) sphère de centre $\Omega(2;-1;1)$ et de rayon $R = 4$.

17) $r = \sqrt{2}$ et $H(1;1;1)$.

18) $I_1(-3;5;2)$ et $I_2(0;2;2)$.

19) $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = (\sqrt{2})^2$.

20) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.

21) $G\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $\widehat{AGD} = \arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

22) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$.

23) On montre que $AM^2 - BM^2 = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}$ avec I milieu de $[AB]$.

24) Droite (AB).

25) $\overrightarrow{k}$.

26) $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = -||\overrightarrow{u}||^2\overrightarrow{v}$.

27) $2\overrightarrow{k}$.

28) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

29) Dans le cas où $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ on peut se placer dans une base orthonormale directe dont le premier vecteur est $\overrightarrow{u}$.

30) $V = \dfrac{1}{6}\ \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = 1$.

31) $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0$.

32) $[\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w} + \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}] = 2\ [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$.

33) Dans le cas où $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ on peut se placer dans une base orthonormale directe dont le premier vecteur est $\overrightarrow{u}$.

34) $(ABC) : x + y + z - 2 = 0$.

35) Plan d'équation cartésienne $x - z = 0$.

36) $x + 2y - 3z = 4$.

37) $x - y - 3z = 4$.

38) Point de coordonnées $(-1; 1; 1)$.

39) $H(-\frac{1}{2}; 3; -\frac{3}{2})$.

40) $\left\{\begin{array}{lcl} x_{M'} & = & +\frac{2}{3}x_M - \frac{1}{3}y_M - \frac{1}{3}z_M \\ y_{M'} & = & -\frac{1}{3}x_M + \frac{2}{3}y_M - \frac{1}{3}z_M \\ z_{M'} & = & -\frac{1}{3}x_M - \frac{1}{3}y_M + \frac{2}{3}z_M \end{array}\right.$.

41) $H(3; 2; 1)$

42) Droite passant par le point de coordonnées $(2; 0; 0)$ dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

43) $M'(-1; -1; 1)$.

44) $H(1; 1; 1)$.

45) Point $(3; -3; 5)$.

46) Points $(1; 1; 1)$ et $(1; -2; 4)$.

47) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 5^2$.

48) Sphère de centre $\Omega(2; -1; 3)$ et de rayon 5.

49) Cercle de centre $H(\frac{1}{5}; \frac{21}{5}; \frac{6}{5})$ et de rayon $r = \frac{12}{5}\sqrt{3}$.