VII. Systèmes linéaires - Matrices

1 Systèmes d'équations linéaires

1.1 Définition d'un système d'équations linéaires

Définition 1. *On appelle* **système linéaire** *de n équations à p inconnues le système d'équations :*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}u_1 & + & a_{1,2}u_2 & + & \dots & + & a_{1,p}u_p & = & v_1 \\ a_{2,1}u_1 & + & a_{2,2}u_2 & + & \dots & + & a_{2,p}u_p & = & v_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n,1}u_1 & + & a_{n,2}u_2 & + & \dots & + & a_{n,p}u_p & = & v_n \end{array}\right.$$

Les nombres réels ou complexes $\{u_j\}_{1\leqslant j\leqslant p}$ sont les inconnues du système et les nombres réels ou complexes $\{a_{i,j}, v_i\}_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ les coefficients du système.

En posant $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$ *et* $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, *ce système se note $AU = V$, A est alors appelée* **matrice associée** *au système.*

Un système tel que $V = 0$ est dit **homogène**, *le système linéaire $AU = 0$ est appelé* **système linéaire homogène associé** *au système $AU = V$.*

Exercice 1. *Écrire matriciellement les systèmes linéaires suivants :*

$$\mathcal{S}_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x + 2z & = & 1 \\ -x + y + z & = & 1 \\ -y - 3z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \mathcal{S}_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ x - 2y & = & 1 \\ 5x - y & = & 2 \end{array}\right. \qquad \mathcal{S}_3 : \left\{\begin{array}{rcr} x - 2y & = & -1 \\ 3x + z & = & 1 \end{array}\right.$$

Définition 2. *On appelle* **solution** *d'un système linéaire $\mathcal{S} : AU = V$ d'inconnue U et de matrice associée A une valeur de U vérifiant l'équation $AU = V$. Résoudre un système linéaire c'est déterminer l'ensemble de ses solutions.*

Exercice 2. *On considère le système linéaire suivant :*

$$\mathcal{S} : \left\{\begin{array}{ccccccr} 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ x & - & y & + & 2z & = & -9 \\ 3x & - & y & - & z & = & -2 \end{array}\right.$$

- *Exprimer z en fonction de x et y en utilisant la ligne 1 puis substituer z dans les lignes 2 et 3.*
- *Exprimer y en fonction de x en utilisant la ligne 2 puis substituer y dans la ligne 3.*
- *En déduire les solutions du système $\mathcal{S}$.*

Exercice 3. *Résoudre les systèmes de l'exercice 1 en procédant par substitution.*

1.2 Opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire

Définition 3. *On définit trois types d'***opérations élémentaires** *sur les lignes d'une système linéaire :*
- *échange des lignes i et j : $L_i \leftrightarrow L_j$.*
- *multiplication de la ligne i par $\lambda \neq 0$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$.*
- *ajout à la ligne i de la ligne $j \neq i$ multipliée par λ : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.*

Exercice 4. *Effectuer successivement les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ sur le système linéaire* $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & & & - & 2z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \end{array}\right.$

En déduire les solutions du système.

Exercice 5. *Décomposer l'opération $L_i \leftarrow 3L_i - 2L_j$ en suite de deux opérations élémentaires de deux manières différentes.*

Propriété 1. *Une opération élémentaire sur les lignes d'un système admet une opération réciproque.*

Exercice 6. *Donner des opérations sur les lignes d'un système n'admettant pas d'opération réciproque.*

Corollaire 1. *Deux systèmes linéaires pour lesquels on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes ont le même ensemble de solutions.*

Exercice 7. *Déterminer les solutions du système linéaire* $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 2z & = & -3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$ *en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes.*

Définition 4. *On appelle* **systèmes équivalents***, deux systèmes linéaires pour lesquels on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.*
On appelle **matrices équivalentes en ligne***, deux matrices A et A' pour lesquelles on passe de l'une à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, on note $A \underset{L}{\sim} A'$.*

Exercice 8. *Montrer que les matrices* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *sont équivalentes en lignes.*

Définition 5. *On appelle* **matrice augmentée** *d'un système linéaire $AU = V$ la matrice $(A|V)$ obtenue en ajoutant à droite la colonne V à la matrice A associée au système.*

Exercice 9. *Déterminer la matrice augmentée M du système* $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & & & = & 1 \end{array}\right.$ *puis résoudre celui-ci en effectuant des opérations élémentaires sur M.*

Propriété 2. *Si on passe d'un système linéaire $\mathcal{S}$ à un système linéaire $\mathcal{S}'$ par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes alors la matrice augmentée de $\mathcal{S}'$ s'obtient à partir de celle de $\mathcal{S}$ par la même suite d'opérations.*

1.3 Échelonnement d'un système linéaire

Définition 6. *On appelle* **matrice échelonnée en lignes**, *une matrice telle que :*
- *si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi,*
- *à partir de la deuxième ligne, dans toute ligne non entièrement nulle, le premier coefficient non nul est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.*

Exemple 1. *Les matrices* $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ *sont échelonnées en lignes.*

Définition 7. *On appelle* **pivot** *d'une ligne non entièrement nulle son premier coefficient non nul. On appelle* **matrice échelonnée réduite en lignes** *une matrice échelonnée dont tous les pivots sont égaux à* 1 *et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.*

Exercice 10. *Montrer que les matrices* M_1 *et* M_2 *de l'exemple 1 sont équivalentes en lignes à des matrices échelonnées réduites en lignes que l'on déterminera.*

Théorème 1. *Toute matrice non nulle est équivalente en lignes à une unique matrice échelonnée réduite en lignes.*

Exercice 11. *Déterminer la matrice échelonnée réduite en lignes équivalente en lignes à la matrice*
$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

1.4 Résolution d'un système linéaire

Définition 8. *On appelle* **rang d'un système linéaire** *le nombre de pivots de la matrice échelonnée réduite équivalente en lignes à la matrice associée au système.*

Exercice 12. *Déterminer le rang des systèmes suivants :*

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ -4x + 11y - 7z = 2 \end{cases} \qquad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases} \qquad \mathcal{S}_3 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \\ x - 4y + 3z = 1 \end{cases}$$

Propriété 3. *On considère un système linéaire dont la matrice associée est échelonnée réduite en lignes, on note* r *son rang et* p *son nombre d'inconnues.*
- *Si le système comporte une ligne dont le membre de gauche est nul et pas celui de droite il n'admet aucune solution et est dit* **incompatible**,
- *dans le cas contraire le système est dit* **compatible**, *il admet :*
  - ◇ *une solution unique si* $r = p$,
  - ◇ *une infinité de solutions si* $r < p$, *l'ensemble des solutions étant alors paramétré par* $p - r$ **inconnues secondaires** *situées sur les colonnes sans pivot, les inconnues situées sur les colonnes avec pivot étant appelées* **inconnues principales**.

Exercice 13. *Résoudre les systèmes de l'exercice 12.*

Propriété 4. *Les solutions d'un système linéaire* $\mathcal{S}$ *compatible sont de la forme* $U = \tilde{U} + U_H$ *où* $\tilde{U}$ *est une solution particulière de* $\mathcal{S}$ *et* U_H *une solution quelconque du système linéaire homogène* $\mathcal{S}_H$ *associé à* $\mathcal{S}$.

Exercice 14. *Vérifier la propriété sur les sytèmes* $\mathcal{S}_2$ *et* $\mathcal{S}_3$ *de l'exercice 12.*

1.5 Famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Définition 9. *On appelle* **combinaison linéaire** *d'une* **famille de vecteurs** *de* $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_p)$, *un vecteur* $\lambda_1\overrightarrow{u}_1 + \lambda_2\overrightarrow{u}_2 + \dots + \lambda_p\overrightarrow{u}_p$ *avec* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$.

Exemple 2. $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ *et* $2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ *sont des combinaisons linéaires de la famille* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

Exercice 15. *On considère une famille de vecteurs* $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ *de* $\mathbb{R}^2$, *montrer que le vecteur* $\overrightarrow{e}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ *est une combinaison linéaire des vecteurs de la famille* $\mathcal{F}$.

Remarque 1. *Résoudre un système linéaire* $AU = V$, *c'est chercher si le membre de droite* V *peut s'exprimer comme combinaison linéaire des colonnes de la matrice* A.

Définition 10. *Une famille de vecteurs* $\mathcal{F}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *est dite* **génératrice** *de* $\mathbb{R}^n$ *si tout vecteur de* $\mathbb{R}^n$ *peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs de* $\mathcal{F}$.

Exercice 16. *On considère une famille de vecteurs* $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{w}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *ainsi qu'un vecteur* $\overrightarrow{e}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Montrer que le système $\overrightarrow{e} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \nu\overrightarrow{w}$ *d'inconnues* λ, μ, ν *admet une solution. En déduire que* $\mathcal{F}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^3$.

Définition 11. *Une famille de vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *est dite* **libre** *si aucun de ses vecteurs ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres. Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite* **liée**.

Remarque 2. *Deux vecteurs non colinéaires forment une famille libre, trois vecteurs non coplanaires forment une famille libre.*

Propriété 5. **Caractérisation d'une famille libre**
Une famille de vecteurs est libre si et seulement si le vecteur nul se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille :
$\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ *est libre* $\Leftrightarrow$ *le système linéaire* $\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \dots + \lambda_p\overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0}$ *admet pour unique solution* $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$

Exercice 17. *On considère une famille de vecteurs* $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-1\\-5\\5\end{pmatrix}\right)$ *de* $\mathbb{R}^3$.

Résoudre le système $\overrightarrow{0} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} + \nu\overrightarrow{w}$ *d'inconnues* λ, μ, ν, *en déduire que la famille* $\mathcal{F}$ *est liée puis exprimer* $\overrightarrow{w}$ *comme combinaison linéaire de* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$.

2 Matrices

2.1 Opérations sur les matrices

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 12. *On appelle* **matrice** *à n lignes et p colonnes à coefficients réels ou complexes un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes de nombres réels ou complexes :*

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note a_{ij} le coefficient de la matrice A situé sur la i-ième ligne et sur la j-ième colonne.

Une matrice comportant une seule ligne est appelée **matrice ligne***, une matrice comportant une seule colonne est appelée* **matrice colonne***, une matrice comportant le même nombre de lignes que de colonnes est appelée* **matrice carrée***.*

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exercice 18. *On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$, donner les coefficients a_{12} a_{22} et a_{23}.*

Définition 13. *Étant données deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit :*

$$\lambda.A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Exercice 19. *Calculer $2A - 3B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.*

Propriété 6. *L'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est* **commutative** *et* **associative** *:*

Pour toutes matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on a :

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Définition 14. *Le* **produit matriciel** *de deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $U \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ noté AU est la matrice colonne obtenue par combinaison linéaire des colonnes de A avec les coefficients de U :*

$$AU = u_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + u_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}$$

Remarque 3. *Le produit AU n'a de sens que si le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice U.*

Exercice 20. *On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.*

Calculer le produit matriciel AU.

Remarque 4. *Le calcul du* **produit matriciel** *de deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $U \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ peut se poser de la façon suivante :*

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vdots \\ v_i \\ \vdots \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{avec} \quad v_i = a_{i1} \times u_1 + a_{i2} \times u_2 + \cdots + a_{ip} \times u_p$$

Exercice 21. *On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

Calculer le produit matriciel AU.

Exercice 22. *On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

Écrire le système linéaire correspondant à l'écriture matricielle $AU = V$.

Définition 15. *On définit le* **produit matriciel** *de deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ par :*

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{pj} & \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \\ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{avec} \quad c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \cdots + a_{ip} \times b_{pj}$$

Remarque 5. *Le produit $A \times B$ est une matrice dont les colonnes sont obtenues par produit de A par les colonnes de B, il n'a de sens que si le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B.*

Exercice 23. *Calculer $A \times C$ et $C \times A$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.*

Propriété 7. *Le produit matriciel est* **associatif** *et* **distributif** *par rapport à l'addition.*

2.2 Noyau et Image d'une matrice

Définition 16. *On appelle* **noyau** *d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et on note $\operatorname{Ker} A$ l'ensemble des vecteurs U solutions du système linéaire homogène $AU = 0$ associé à la matrice A.*

Remarque 6. *On a* $\operatorname{Ker} A \subset \mathbb{K}^p$.

Exercice 24. *On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre le système linéaire $AU = 0$ en procédant par échelonnement-réduction et en déduire le noyau de la matrice A.*

Définition 17. *On appelle* **image** *d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et on note $\operatorname{Im} A$ l'ensemble des vecteurs V tels que le système linéaire $AU = V$ associé à la matrice A soit compatible.*

Remarque 7. *On a* $\operatorname{Im} A \subset \mathbb{K}^n$.

Remarque 8. $\operatorname{Im} A$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs associés aux colonnes de la matrice A.*

Exercice 25. *On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ pour que le système linéaire $AU = V$ admette une solution (on procédera par échelonnement-réduction) et en déduire l'image de la matrice A.*

Définition 18. *On appelle* **rang** *d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et on note $\operatorname{rg} A$ le nombre de pivots de la matrice échelonnée réduite équivalente en lignes à la matrice A.*

Exercice 26. *Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.*

2.3 Matrices carrées

Définition 19. *Une matrice carrée A est apelée :*

- **matrice diagonale** *si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$*
  (les coefficients sont nuls en dehors de la diagonale)
- **matrice triangulaire supérieure** *si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$*
  (les coefficients sont nuls en dessous de la diagonale)
- **matrice triangulaire inférieure** *si $a_{ij} = 0$ pour tout $i < j$*
  (les coefficients sont nuls au dessus de la diagonale)

Exercice 27. *Montrer que le produit de deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale. Que peut-on dire du produit de deux matrices triangulaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?*

2.3.1 Puissances d'une matrice carrée

Définition 20. *On appelle* **matrice identité** *de taille n la matrice carrée $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$ de taille n dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 et dont les autres coefficients sont nuls.*

Exercice 28. *Calculer les produits AI_2 et I_2A pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ puis calculer les produits AI_3 et I_3A pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Que valent les produits AI_n et I_nA pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?*

Définition 21. *On définit les* **puissances d'une matrice** *carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :*

$$\begin{cases} A^0 & = & I_n \\ A^m & = & \underbrace{A \times A \times \cdots \times A \times A}_{m \text{ fois la matrice } A} \text{ , pour tout } m \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Exercice 29. *Calculer les puissances de la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Propriété 8. *On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors pour tout $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ on a $A^{m_1}A^{m_2} = A^{m1+m2}$.*

Exercice 30. *On considère $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, développer $(A+B)^3$.*

Propriété 9. **Triangle de Pascal**
On considère deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$ et $m \in \mathbb{N}$, alors le développement de $(A+B)^m$ est le même que celui de $(A+B)^m$ avec A et B des nombres réels ou complexes.

Remarque 9. *Il ne faut pas oublier de vérifier que les matrices A et B commutent entre elles !*

Exercice 31. *On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, développer $(A+I_n)^5$.*

2.3.2 Inverse d'une matrice carrée

Définition 22. *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe une matrice carrée $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ appelée* **inverse** *de la matrice A telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.*

Remarque 10. *La matrice identité est inversible et est son propre inverse.*

Propriété 10. *Si une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet un inverse, celui-ci est unique.*

Exercice 32. *Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.*

Propriété 11. *On considère un système linéaire $AU = V$ de n équations à n inconnues, si A est inversible alors ce système admet une unique solution $U = A^{-1}V$.*

Propriété 12. **Méthode de calcul de l'inverse d'une matrice**
Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si $\operatorname{rg} A = n$ et dans ce cas l'algorithme d'échelonnement-réduction en lignes appliqué à la matrice augmentée $(A|I_n)$ aboutit à la matrice augmentée $(I_n|A^{-1})$.

Exercice 33. *Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.*

Propriété 13. *On considère deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles et $m \in \mathbb{N}$, alors :*

- *A^m est inversible et $\boxed{(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m}$,*
- *AB est inversible et $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$.*

Définition 23. *On appelle* **groupe linéaire** *et on note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n.*

Exercices supplémentaires

Exercice 34

Écrire le système $\left\{\begin{array}{rcr} x-2z & = & 2 \\ x-y-t & = & -1 \\ 2z-3t & = & 0 \end{array}\right.$ sous forme matricielle $AU=V$ avec $U=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

Exercice 35

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 1 \\ x+y-z & = & 2 \\ -x+y+z & = & 3 \end{array}\right.$ en procédant par substitution.

Exercice 36

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right.$ en procédant par substitution.

Exercice 37 ($\star$)

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 0 \\ 7x & + & 8y & + & 9z & = & 0 \end{array}\right.$ en procédant par substitution.

Exercice 38

Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont équivalentes en lignes.

Exercice 39

Pour chacune des matrices suivantes, déterminer une matrice échelonnée réduite en lignes qui lui soit équivalente en lignes :
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

Exercice 40 ($\star\star$)

Déterminer en fonction de $m\in\mathbb{R}$ une matrice échelonnée réduite en lignes qui soit équivalente en lignes à la matrice $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 2 & 2 & m \end{pmatrix}$.

Exercice 41

Déterminer le rang du système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 0 \\ 7x & + & 8y & + & 9z & = & 0 \\ 10x & + & 11y & + & 12z & = & 0 \end{array}\right.$.

Exercice 42 ($\star$)

Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} mx & + & y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & mz & = & 3 \end{array}\right.$ d'inconnues x, y et z est compatible.

Exercice 43

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & & & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 2y & & & = & 3 \end{array}\right.$.

Exercice 44

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ -3x & + & 3y & + & z & = & 2 \\ 7x & - & 7y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$.

Exercice 45

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$.

Exercice 46

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 1 \\ 5x & + & 6y & + & 7z & + & 8t & = & 1 \\ 9x & + & 10y & + & 11z & + & 12t & = & 1 \end{array}\right.$.

Exercice 47 ($\star\star$)

Résoudre en fontion de $m \in \mathbb{R}$ le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} mx & + & y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & mz & = & 3 \end{array}\right.$ d'inconnues x, y et z.

Exercice 48 ($\star\star$)

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{lcl} x^2y^2z^5 & = & 1 \\ x^3y^2z^6 & = & 2 \\ x\ y^3z^6 & = & 3 \end{array}\right.$ avec $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Exercice 49 ($\star\star$)

On définit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe a, b, c et d tels que $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Exercice 50

Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{F} = \left\{ \overrightarrow{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{u}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{u}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 27 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{u}_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 64 \end{pmatrix} \right\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ?

Exercice 51

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer AB et BA.

Exercice 52

On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices U telles que $MU = V$.

Exercice 53

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$.

Exercice 54 ($\star\star$)

On note $M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer $\operatorname{Ker} M_\lambda$ et $\operatorname{Im} M_\lambda$ en fonction de λ.

Exercice 55

Déterminer le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 56 ($\star\star$)

On note $M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de M_λ en fonction de λ.

Exercice 57

On note $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer M^5.

Exercice 58 ($\star$)

On pose $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $M_\alpha M_\beta$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, en déduire $(M_\theta)^n$ pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 59 ($\star$)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices B telles que $AB = BA$.

Exercice 60 ($\star\star$)

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer M^{10} en utilisant le triangle de Pascal. (On pourra décomposer M sous la forme $M = I_3 + N$)

Exercice 61

Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 62 ($\star$)

Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1+i & -1 & i \\ i & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse. ($i^2 = -1$)

Exercice 63 ($\star\star$)

On pose $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Exprimer M^2 comme combinaison linéaire de M et de I_3, en déduire que M est inversible et calculer M^{-1}.

Exercice 64 ($\star\star$)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ soit inversible.

Exercice 65 ($\star\star$)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & i\sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin x & 0 & \cos x \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$.
Calculer $B = P^{-1}AP$, en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Réponses

1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) $(x = -1; y = 2; z = -3)$.

3) $\varnothing$; $(x = \frac{1}{3}; y = -\frac{1}{3})$;$(x; y = \frac{x+1}{2}; z = 1 - 3x)$.

4) $\varnothing$.

5) $\begin{array}{lcl} L_i & \leftarrow & 3L_i \\ L_i & \leftarrow & L_i - 2L_j \end{array}$ ou bien $\begin{array}{lcl} L_i & \leftarrow & L_i - \frac{2}{3}L_j \\ L_i & \leftarrow & 3L_i \end{array}$.

6) $L_i \leftarrow 0L_i$; $L_i \leftarrow L_j$.

7) $(x = 1; y = 2; z = 3)$.

8) $L_1 \leftarrow -L_1$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$, $L_3 \leftarrow -L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$.

9) $(x = 0; y = 1; z = 0)$.

10) $M_1 \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

11) $M \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

12) $\mathrm{rg}(\mathcal{S}_1) = 2$, $\mathrm{rg}(\mathcal{S}_2) = 3$ et $\mathrm{rg}(\mathcal{S}_3) = 2$.

13) $\varnothing$, $(x = 1; y = 0; z = -1)$ et $(x = 1 - \frac{1}{3}z; y = \frac{2}{3}z; z = z)$.

14) $\varnothing$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}z \\ \frac{2}{3}z \\ z \end{pmatrix}$.

15) $\overrightarrow{e} = -2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$.

16) On montre que le système est de rang 3.

17) $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$.

18) $a_{12} = -2$, $a_{22} = 5$ et $a_{23} = -6$.

19) $2A - 3B = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 15 \\ -26 & 25 & -24 \end{pmatrix}$.

20) $AU = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix}$.

21) $AU = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

22) $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ -4x + 5y - 6z = 1 \end{cases}$

23) $AC = \begin{pmatrix} -14 & 28 \\ 32 & -73 \end{pmatrix}$ et $CA = \begin{pmatrix} -25 & 32 & -39 \\ 22 & -29 & 36 \\ -19 & 26 & -33 \end{pmatrix}$.

24) $\mathrm{Ker}\, A = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R} \right\}$.

25) $\mathrm{Im}\, A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \ / \ a - 2b + c = 0 \right\}$.

26) $\mathrm{rg}\, A = 2$.

27) Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

28) $AI_n = I_nA = A$.

29) $N^0 = I_4$, $N^1 = N$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $N^3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$ et $N^m = 0$ pour $m \geqslant 4$.

30) $(A+B)^3 = A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3$.

31) $(A+I_n)^5 = A^5 + 5A^4 + 10A^3 + 10A^2 + 5A + I_n$.

32) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

33) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

34) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

35) $\left(x = \frac{3}{2} ; y = \frac{5}{2} ; z = 2\right)$.

36) $\left(x = \frac{1}{6} ; y = \frac{1}{6} ; z = \frac{1}{6}\right)$.

37) $(x = z ; y = -2z ; z = z)$.

38) $L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$, $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$.

39) $\begin{pmatrix} 1&0&-1 \\ 0&1&2 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1&0&-2&-\frac{34}{7} \\ 0&1&3&\frac{39}{7} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1&0&-1&2 \\ 0&1&-2&3 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$.

40) $\begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$ pour $m = 1$, $\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&1 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$ pour $m = 2$, $\begin{pmatrix} 1&0&-\frac{5}{8} \\ 0&1&-\frac{7}{8} \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$ pour $m = -3$, $\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&1 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$ pour $m \neq 1$, $m \neq 2$ et $m \neq -3$.

41) Le rang du système est 2.

42) Le système est compatible pour $m \neq 2$.

43) $\left(x = 2 \ ; \ y = \frac{1}{2} \ ; \ z = 0\right)$.

44) $\left(x = -\frac{1}{5} + y \ ; \ y = y \ ; \ z = \frac{7}{5}\right)$.

45) $(x = 1 \ ; \ y = 0 \ ; \ z = 0)$.

46) $(x = -1 + z + 2t \ ; \ y = 1 - 2z - 3t \ ; \ z = z ; t = t)$.

47) $(x = 1 + z \ ; \ y = 1 - 2z \ ; \ z = z)$ si $m = 0$, $\left(x = \frac{-1}{m-2} \ ; \ y = 2 \ ; \ z = \frac{1}{m-2}\right)$ si $m \neq 0$ et $m \neq 2$, pas de solution pour $m = 2$.

48) $(x = \frac{1}{72} \ ; \ y = \frac{1}{3456} \ ; \ z = 144)$ en passant au logarithme (on remarque que x, y et z sont strictements positifs).

49) $a = -\frac{18}{\pi^3}$, $b = \frac{27}{2\pi^2}$, $c = -\frac{1}{4\pi}$ et $d = 0$.

50) On montre que $\overrightarrow{u}_4 = 4\overrightarrow{u}_1 - 6\overrightarrow{u}_2 + 4\overrightarrow{u}_3$.

51) $AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 2&0&1 \\ 0&2&3 \\ 1&3&5 \end{pmatrix}$.

52) $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

53) $\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \ , \ z \in \mathbb{K} \right\}$ et $\operatorname{Im} A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \ , \ a, b, c \in \mathbb{K} \ / \ a - 2b + c = 0 \right\}$.

54) $\operatorname{Ker} M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \ , \ z \in \mathbb{K} \right\}$ et $\operatorname{Im} M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \ , \ a, b, c \in \mathbb{K} \ / \ a - b + c = 0 \right\}$; $\operatorname{Ker} M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \ , \ z \in \mathbb{K} \right\}$ et $\operatorname{Im} M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \ , \ a, b, c \in \mathbb{K} \ / \ a - c = 0 \right\}$; $\operatorname{Ker} M_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ z \in \mathbb{K} \right\}$ et $\operatorname{Im} M_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \ , \ a, b, c \in \mathbb{K} \right\}$ si $\lambda \neq 0, 1$.

55) $\operatorname{rg} M = 2$.

56) Le rang de M_λ vaut 1 si $\lambda = 1$, 2 si $\lambda = -2$ et 3 sinon.

57) $M^5 = M$.

58) $M_\alpha M_\beta = M_{\alpha+\beta}$ et $(M_\theta)^n = M_{n\theta}$.

59) $B = \begin{pmatrix} -c+d & \frac{2}{3}c \\ c & d \end{pmatrix}$.

60) $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 42 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

61) $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

62) $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 1+i & i & 1-2i \\ -i & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

63) $M^2 = 5M - 4I_3$ d'où $M^{-1} = \dfrac{1}{4}(5I_3 - M) = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

64) $a^3 + b^3 + c^3 \neq 3abc$.

65) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{ix} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ix} \end{pmatrix}$ et $A^n = \begin{pmatrix} \cos(nx) & 0 & i\sin(nx) \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin(nx) & 0 & \cos(nx) \end{pmatrix}$.