VIII. Ensembles de nombres

1 Ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels

Exercice 1.
- *Déterminer les diviseurs de* 1*, les diviseurs de* 1×2*, les diviseurs de* $1\times 2\times 3$*, les diviseurs de* $1\times 2\times 3\times 4$ *puis les diviseurs de* $1\times 2\times 3\times 4\times 5$ *.*
- *Quelle conjecture peut-on émettre concernant le nombre de diviseurs de* $1\times 2\times 3\times\cdots\times n$ *?*
- *Déterminer le nombre de diviseurs de* $1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6$*.*

Définition 1. *Une propriété* (P_n) *dépendant d'un nombre entier naturel* n *est dite* **héréditaire** *si lorsqu'elle est vraie pour un certain rang* n *alors elle est également vraie pour le rang* $n+1$*.*

Exemple 1. *La propriété* (P_n) : « $n!$ *possède* 2^{n-1} *diviseurs* » *n'est pas héréditaire car elle est vraie au rang* $n=5$ *mais pas au rang* $n=6$*.*

Exercice 2. *La propriété* (P_n) : « 2^n+n *est un nombre pair* » *est-elle héréditaire ?*

Exemple 2. *La propriété* (P_n) : « 2^n *est un multiple de* 3 » *est héréditaire, en effet supposons qu'il existe un rang* n *pour lequel* 2^n *est un multiple de* 3 *alors* $2^n=3k$ *avec* $k\in\mathbb{N}$ *d'où* $2^{n+1}=2^n\times 2=3k\times 2=3\times 2k$ *et* 2^{n+1} *est aussi un multiple de* 3*.*

Remarque 1. *Une propriété héréditaire peut être fausse pour tout rang.*

Exercice 3. *Montrer que la propriété* (P_n) : « 10^n+1 *est un multiple de* 9 » *est héréditaire.*

Théorème 1. Principe de récurrence
Une propriété (P_n) *dépendant d'un nombre entier naturel* n *qui est héréditaire et qui est vraie au rang* 0 *est vraie pour tout rang* $n\in\mathbb{N}$*.*

Remarque 2. *Une propriété qui est héréditaire et qui est vraie au rang* n_0 *sera vraie pour tout rang* $n\geqslant n_0$*.*

Exemple 3. *Montrons que* 4^n+2 *est un multiple de* 3 *pour tout* $n\in\mathbb{N}$*.*
On considère la propriété (P_n) : « 4^n+2 *est un multiple de* 3 » *.*
- ***initialisation*** *:* $4^0+2=3$ *est un multiple de* 3 *donc la propriété* P_0 *est vraie.*
- ***hérédité*** *: supposons qu'il existe un entier naturel* $n\in\mathbb{N}$ *tel que* P_n *soit vraie, on a alors* $4^n+2=3k$ *avec* $k\in\mathbb{N}$ *d'où* $4^n=3k-2$*,* $4^{n+1}=12k-8$ *et* $4^{n+1}+2=12k-6=3(4k-2)$ *donc* P_{n+1} *est vraie.*
- ***conclusion*** *: la propriété* P_n *est vraie au rang* 0 *et est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, la propriété* P_n *est vraie pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *et on a prouvé que* 4^n+2 *est un multiple de* 3 *pour tout* $n\in\mathbb{N}$*.*

Exercice 4. *On considère la matrice* $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$*.*

Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ *on a* $A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$*.*

Exercice 5. *Démontrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *on a* $n<2^n$*.*

Exercice 6. *Démontrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *la fonction* $f:x\mapsto e^{2x}$ *est* n *fois dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que sa dérivée* n*-ième est* $f^{(n)}(x)=2^ne^{2x}$*.*

Corollaire 1. **Suite définie par récurrence**
On considère une fonction f et un nombre réel a, il existe une unique suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & a \\ u_{n+1} & = & f(u_n)\ ,\ \textit{pour tout } n \geqslant 0 \end{array}\right.$$

Exercice 7. *On considère la suite* $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & 2u_n+1\ ,\ \textit{pour tout } n \geqslant 0 \end{array}\right.$.

- *Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4.*
- *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = 2^n - 1$, pour tout $n \geqslant 0$.*

Remarque 3. *On peut également définir une suite par récurrence sur les deux termes précédents en donnant u_0 et u_1 en condition initiale.*

Exercice 8. *On considère la suite* $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 2 \\ u_{n+2} & = & 3u_{n+1}-2u_n\ ,\ \textit{pour tout } n \geqslant 0 \end{array}\right.$.

Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4.

Corollaire 2. **Principe de récurrence avec prédécesseurs**
On considère une propriété P_n dépendant d'un nombre entier naturel n telle que :

- *P_0 est vraie (**initialisation**)*
- *si P_0 et P_1 et ... et P_n sont vraies alors P_{n+1} vraie (**hérédité forte**)*

alors la propriété P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9. *On considère la suite* $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 2 \\ u_{n+2} & = & 3u_{n+1}-2u_n\ ,\ \textit{pour tout } n \geqslant 0 \end{array}\right.$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = 2^n$, $n \geqslant 0$.

Définition 2. **Symbole somme**
Étant donnés un entier naturel n non nul et n nombres a_1, a_2, ... ,a_n réels ou complexes, on note :

$$\boxed{\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k = \sum_{k=1}^{k=n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

Remarque 4. *On a* $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} a = na$ *pour a un nombre réel ou complexe et $n \in \mathbb{N}^*$.*

Exercice 10. *Calculer* $\displaystyle\sum_{k=2}^{k=6} k(k+1)$.

Propriété 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors* $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$.

Exercice 11. *Démontrer que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ *pour $n \in \mathbb{N}$.*

Définition 3. Symbole produit
Étant donnés un entier naturel n non nul et n nombres $a_1,\ a_2,\ \dots\ ,a_n$ réels ou complexes, on note :

$$\boxed{\prod_{1\leqslant k\leqslant n} a_k = \prod_{k=1}^{k=n} a_k = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n}$$

Remarque 5. *On a* $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} a = a^n$ *pour a un nombre réel ou complexe et $n \in \mathbb{N}^*$.*

Exercice 12. *Calculer* $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=6} \frac{k}{k+2}$.

Définition 4. Symbole factorielle
Étant donné un entier naturel n on définit sa **factorielle** *$n!$ par :*

$$\boxed{\begin{array}{lcl} 0! & = & 1 \\ n! & = & \displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n\ ,\ \ n > 0 \end{array}}$$

Exercice 13. *Calculer* $\dfrac{8!}{(4!)^2}$.

Définition 5. *Étant donné un nombre r réel ou complexe, on appelle* **suite arithmétique** *de* **raison** *r une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r\ ,\ \ n \in \mathbb{N}$.*

Exemple 4. *La suite des entiers pairs et la suite des entiers impairs sont arithmétiques de raison 2.*

Propriété 2. *On considère une suite arithmétique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de raison r et $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant q$, alors :*

$$u_q = u_p + (q-p)r \qquad\qquad \sum_{k=p}^{k=q} u_k = (q-p+1)\frac{u_p + u_q}{2}$$

Exercice 14. *Calculer la somme des n premiers entiers impairs.*

Définition 6. *Étant donné un nombre r réel ou complexe, on appelle* **suite géométrique** *de* **raison** *r une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n \times r\ ,\ \ n \in \mathbb{N}$.*

Exemple 5. *La suite des puissances de deux est géométrique.*

Propriété 3. *On considère une suite géométrique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de raison r et $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant q$, alors :*

$$u_q = u_p \times r^{q-p} \qquad\qquad \sum_{k=p}^{k=q} u_k = \frac{u_p - r \times u_q}{1-r} \ \ \text{si } r \neq 1$$

Exercice 15. *Calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 2^k$.

2 Ensembles finis

2.1 Définition d'un ensemble fini

Définition 7. Image directe et image réciproque
Étant donnés une application $f : E \to F$, $A \subset E$ et $B \subset F$, on appelle **image directe** *de A par f et on note $f(A)$ l'ensemble des images par f des éléments de A et on appelle* **image réciproque** *de B par f et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble des antécédents par f des éléments de B :*

$$\boxed{f(A) = \{f(x)/x \in A\}} \qquad \boxed{f^{-1}(B) = \{x/f(x) \in B\}}$$

Remarque 6. *On a $f(A) \subset F$ et $f^{-1}(B) \subset E$.*

Exercice 16. *On considère* $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, *déterminer $f([-1;1])$ et $f^{-1}([1;2])$.*

Définition 8. *Une application $f : E \to F$ est dite* **injective** *si tout élément de F admet au plus un antécédent par f,* **surjective** *si tout élément de F admet au moins un antécédent par f et* **bijective** *si tout élément de F admet exactement un antécédent par f.*

Remarque 7. *Une application est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.*

Remarque 8. *Une application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $f(E) = F$.*

Remarque 9. *Si $f : E \to F$ est injective alors* $g : \begin{array}{rcl} E & \to & f(E) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ *est bijective.*

Exemple 6. *On considère* $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ *et* $f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ *: f_1 est une injection, f_2 est une surjection et f_3 est une bijection.*

Exercice 17. *Montrer que* $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ *est injective.*

Définition 9. *Étant donnés $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant q$, on note* $\boxed{[\![p;q]\!] = \{n \in \mathbb{N}/p \leqslant n \leqslant q\}}$.

Définition 10. *Un ensemble E est dit fini s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de $[\![1;n]\!]$ sur E, le nombre n est alors unique et appelé* **cardinal** *ou* **nombre d'éléments** *de l'ensemble E noté $\text{Card}(E)$, on convient que $\text{Card}(\varnothing) = 0$.*

Remarque 10. *La bijection de la définition correspond à l'idée intuitive de numérotation.*

Exercice 18. *Montrer que l'ensemble $E = [\![5;10]\!]$ est fini et déterminer son cardinal.*

Propriété 4. *On considère deux ensembles E et F avec $E \subset F$, si F est un ensemble fini alors E est un ensemble fini et $\text{Card}(E) \leqslant \text{Card}(F)$ avec $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ si et seulement si $E = F$.*

Propriété 5. *On considère deux ensembles finis E et F ainsi qu'une bijection $f : E \to F$ alors $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.*

Propriété 6. *On considère deux ensembles finis E et F avec $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ ainsi qu'une application $f : E \to F$ alors les propositions suivantes sont équivalentes :*
- *f est injective*
- *f est surjective*
- *f est bijective*

Contre-exemple 1. *L'application* $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2 \end{array}$ *est injective mais pas surjective.*

2.2 Dénombrements

Propriété 7. *On considère deux ensembles finis E et F alors $E \cup F$ et $E \cap F$ sont des ensembles finis et* $\boxed{\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)}$.

Exercice 19. *Vérifier la formule avec $E = [\![2;5]\!]$ et $F = [\![3;7]\!]$.*

Propriété 8. *On considère deux ensembles finis E et F alors $E \times F = \{(x;y)/x \in E, y \in F\}$ est un ensemble fini et* $\boxed{\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)}$.

Exercice 20. *Déterminer les éléments de $[\![1;2]\!] \times [\![1;3]\!]$.*

Propriété 9. *On considère deux ensembles finis E et F alors l'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$ des applications de E dans F est un ensemble fini et* $\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{F}(E,F)) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}}$.

Exercice 21. *Déterminer les éléments de $\mathcal{F}([\![1;2]\!], [\![1;3]\!])$.*

Exercice 22. *Déterminer les injections de $[\![1;2]\!]$ dans $[\![1;3]\!]$.*

Propriété 10. *On considère un ensemble fini E de cardinal n, l'ensemble des bijections de E dans E appelées également* **permutations** *est de cardinal $n!$.*

Exercice 23. *Déterminer les permutations de $[\![1;3]\!]$.*

Propriété 11. *On considère un ensemble fini E, alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est un ensemble fini et* $\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}}$.

Exercice 24. *Déterminer $\mathcal{P}([\![1;3]\!])$.*

Propriété 12. *On considère un ensemble fini E de cardinal $n \neq 0$ et $p \in [\![0;n]\!]$, alors l'ensemble des parties de E ayant p éléments est un ensemble fini de cardinal* $\boxed{\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$.

Exercice 25. *Déterminer les parties de $[\![1,4]\!]$ ayant 2 éléments.*

Propriété 13. *On considère $n \in \mathbb{N}^*$, alors :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix} \;,\; p \in [\![0;n]\!] \\ \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix} \;,\; p \in [\![1;n-1]\!] \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} & = & 2^n \end{array}}$$

Propriété 14. **Formule du binôme**
On considère x et y deux nombres réels ou complexes et $n \in \mathbb{N}^*$ alors :

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k} y^k}$$

Exercice 26. *Déterminer le coefficient de x^7 dans le développement de $(1+x)^{10}$.*

Exercices supplémentaires

Exercice 27

Montrer que la propriété « $8^n + 1$ *est un multiple de* 7 » est héréditaire, que peut-on en déduire ?

Exercice 28

Démontrer que $7^n - 1$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 29

Démontrer que le n-ième nombre entier impair est $2n - 1$.

Exercice 30 ($\star$)

Déterminer le reste de la division euclidienne de 8^n par 7.

Exercice 31 ($\star\star$)

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le produit $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6.

Exercice 32

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

Exercice 33

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 34 ($\star$)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 35

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on a $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Exercice 36 ($\star$)

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $2n \leqslant 3^n$.

Exercice 37 ($\star$)

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $3^n - 2^n \geqslant n$.

Exercice 38 ($\star\star$)

Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$ on a $(n+2)^2 \leqslant 2^n$.

Exercice 39

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée n-ième est $f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$.

Exercice 40 ($\star$)

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction sinus est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 41

On considère la suite $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & 2u_n + n - 1 \ , \ \text{pour tout } n \geqslant 0 \end{array}\right.$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = 2^n - n$.

Exercice 42

On considère la suite $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n + n \ , \ \text{pour tout } n \geqslant 0 \end{array}\right.$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = \dfrac{n^2 - n + 2}{2}$.

Exercice 43 ($\star$)

On considère la suite $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n}{u_n + 2} \ , \ \text{pour tout } n \geqslant 0 \end{array}\right.$.

Déterminer une formule explicite pour u_n.

Exercice 44 ($\star\star$)

On considère la suite $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & 3u_n + 2 \ , \ \text{pour tout } n \geqslant 0 \end{array}\right.$.

Déterminer une formule explicite pour u_n.

Exercice 45

On considère la suite $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ u_{n+2} & = & 5u_{n+1} - 6u_n \ , \ \text{pour tout } n \geqslant 0 \end{array}\right.$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = 3^n - 2^n$.

Exercice 46 ($\star\star\star$)

On considère la suite $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 1 \\ u_{n+2} & = & u_{n+1}+6u_n \ , \ \text{pour tout } n \geqslant 0 \end{array}\right.$.

Déterminer une formule explicite pour u_n.

Exercice 47

Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{k=5} \frac{k}{k+1}$.

Exercice 48 ($\star$)

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)$.

Exercice 49 ($\star$)

Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 50 ($\star$)

Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 51

Calculer $\displaystyle\prod_{k=-2}^{k=2} (2k-1)$.

Exercice 52

Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{k=n} 2^k$.

Exercice 53

Calculer $\dfrac{6!}{(2!)^2(3!)^2}$.

Exercice 54

Calculer $\dfrac{1! \times 3! \times 5! \times 7!}{10!}$.

Exercice 55

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est n fois dérivable sur $]0; +\infty[$ avec $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

Exercice 56 ($\star$)

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est n fois dérivable sur $]1;+\infty[$ et déterminer sa dérivée n-ième.

Exercice 57 ($\star\star$)

On considère la suite $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 1 \\ u_{n+2} & = & (n+2)(u_n+u_{n+1}) \text{ , pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$.

Démontrer que $n! \leqslant u_n \leqslant (n+1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 58 ($\star\star$)

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k(k!)$.

Exercice 59

Calculer $1+3+5+7+\cdots+99$.

Exercice 60

Calculer $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\cdots+\dfrac{1}{1024}$.

Exercice 61 ($\star$)

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 2^{2k+1}$.

Exercice 62 ($\star$)

Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{k=n} 2^{2k+1}$.

Exercice 63

On considère la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+x+1 \end{array}$, déterminer $f([-2;0])$ et $f^{-1}([-1;1])$.

Exercice 64 ($\star\star$)

On considère la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^3+3x^2-12x \end{array}$, déterminer $f([-2;2])$ et $f^{-1}([-7;20])$.

Exercice 65

On considère l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$.

f est-elle surjective ? f est-elle injective ?

Exercice 66

Démontrer que la fonction $f: \begin{array}{ccc} [-1;1] & \rightarrow & [-1;1] \\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{x^2+1} \end{array}$ est bijective.

Exercice 67

Montrer que l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (x+y;x-y) \end{array}$ est bijective.

Exercice 68 ($\star$)

Démontrer que l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 3n+(-1)^n \end{array}$ est injective.

Exercice 69 ($\star\star$)

Démontrer que l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \dfrac{1+(2n+1)(-1)^{n+1}}{4} \end{array}$ est bijective.

Exercice 70

Montrer que l'ensemble $E = \{(m;n) \;/\; m,n \in \mathbb{N} \text{ et } m^2+n^2 \leqslant 4\}$ est fini et déterminer son cardinal.

Exercice 71 ($\star\star$)

Montrer que l'ensemble $E = \{n \;/\; n \in \mathbb{N} \text{ et } 2^n < n^3\}$ est fini.

Exercice 72

Déterminer le nombre de surjections de $[\![1;3]\!]$ dans $[\![1;2]\!]$.

Exercice 73 ($\star$)

Déterminer pour $n,p \geqslant 1$ le nombre d'injections de $[\![1;p]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$.

Exercice 74

Un domino est composé de deux parties comprenant chacune un nombre entier compris entre 0 et 6. Combien y a-t-il de dominos distincts ?

Exercice 75

Deux équipes de football de 11 joueurs chacune se rencontrent. Au début du match les joueurs des deux équipes se serrent la main. À la fin du match les joueurs de l'équipe victorieuse se font l'accolade.

Combien de poignées de mains et combien d'accolades ont été échangées ?

Exercice 76 ($\star$)

On appelle main un ensemble de cinq cartes. Combien existe-t-il de mains formées à partir d'un jeu de 32 cartes comprenant au moins 3 as ?

Exercice 77 ($\star$)

Calculer la probabilité d'obtenir un carré dans une main à partir d'un jeu de 52 cartes.

Exercice 78 ($\star$)

Déterminer le nombre de diviseurs positifs de 720.

Exercice 79 ($\star\star$)

On considère une table circulaire comportant $2n$ places, $n \in \mathbb{N}^*$. On désire disposer autour de cette table les $2n$ individus que constituent n couples hétérosexuels.

1. Déterminer le nombre de dispositions des $2n$ individus.
2. Déterminer le nombre de dispositions des $2n$ individus respectant l'alternance homme-femme.
3. Déterminer le nombre de dispositions des $2n$ individus ne séparant pas les couples.
4. Déterminer le nombre de dispositions des $2n$ individus ne séparant pas les couples et respectant l'alternance homme-femme.

Exercice 80

Calculer $\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 81

Calculer $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$ pour $n \geqslant 1$ et calculer $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ pour $n \geqslant 2$.

Exercice 82 ($\star\star$)

On considère la fonction $f : x \mapsto (e^x + 1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est dérivable et exprimer f et f' à l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Exercice 83

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$ en utilisant la formule du binôme en posant $M = I + N$ avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 84 ($\star$)

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Réponses

1) Le nombre de diviseurs de $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$ est 30.

2) La propriété n'est pas héréditaire car elle est vraie au rang $n = 2$ mais pas au rang $n = 3$.

3) Si $10^n + 1 = 9k$ alors $10^{n+1} + 1 = 9(10k - 1)$.

4) Pour l'hérédité, on utilise la relation $A^{n+1} = A \times A^n$.

5) Pour l'hérédité, on remarque que $n + 1 < 2^n + 1 \leqslant 2^n + 2^n$.

6) Pour l'hérédité, on remarque que si u est une fonction dérivable alors e^u est aussi dérivable avec $(e^u)' = u'e^u$.

7) On a $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 7$ et $u_4 = 15$. Pour l'hérédité, on remarque que $2(2^n-1)+1 = 2^{n+1}-1$.

8) On a $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 8$ et $u_4 = 16$.

9) Pour l'hérédité, on remarque que $3 \times 2^{n+1} - 2 \times 2^n = 2^n \times (6 - 2) = 2^{n+2}$.

10) 110.

11) Pour l'hérédité, on remarque que $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n+1} 2^k = \left(\sum_{k=0}^{k=n} 2^k\right) + 2^{n+1}$.

12) $\dfrac{3}{28}$.

13) 70.

14) n^2.

15) $2^{n+1} - 1$.

16) $f([-1;1]) = [0;1]$ et $f^{-1}([1;2]) = [-\sqrt{2};-1] \cup [1;\sqrt{2}]$.

17) On montre que $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = y$.

18) On montre que $f: \begin{array}{ccc} [\![5;10]\!] & \to & [\![1;6]\!] \\ n & \mapsto & n-4 \end{array}$ est bijective.

19) On remarque que $E \cup F = [\![2;7]\!]$ et $E \cap F = [\![3;5]\!]$.

20) $[\![1,2]\!] \times [\![1,3]\!] = \{(1;1),(1;2),(1;3),(2;1),(2;2),(2;3)\}$.

21) $\begin{pmatrix} 1\mapsto 1 \\ 2\mapsto 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\mapsto 2 \\ 2\mapsto 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\mapsto 3 \\ 2\mapsto 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\mapsto 1 \\ 2\mapsto 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\mapsto 2 \\ 2\mapsto 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\mapsto 3 \\ 2\mapsto 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\mapsto 1 \\ 2\mapsto 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\mapsto 2 \\ 2\mapsto 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1\mapsto 3 \\ 2\mapsto 3 \end{pmatrix}$.

22) $\begin{pmatrix} 1\mapsto 1 \\ 2\mapsto 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\mapsto 1 \\ 2\mapsto 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\mapsto 2 \\ 2\mapsto 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\mapsto 2 \\ 2\mapsto 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\mapsto 3 \\ 2\mapsto 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1\mapsto 3 \\ 3\mapsto 2 \end{pmatrix}$.

23) $\begin{pmatrix} 1\mapsto 1 \\ 2\mapsto 2 \\ 3\mapsto 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\mapsto 1 \\ 2\mapsto 3 \\ 3\mapsto 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\mapsto 2 \\ 2\mapsto 1 \\ 3\mapsto 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\mapsto 2 \\ 2\mapsto 3 \\ 3\mapsto 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\mapsto 3 \\ 2\mapsto 1 \\ 3\mapsto 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1\mapsto 3 \\ 2\mapsto 2 \\ 3\mapsto 1 \end{pmatrix}$.

24) $\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

25) $\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$.

26) 120.

27) Si $8^n + 1 = 7k$ alors $8^{n+1} + 1 = 7(8k - 1)$.

28) Si $7^n - 1 = 3k$ alors $7^{n+1} - 1 = 3(7k + 2)$.

29) Pour l'hérédité, on remarque qu'il faut ajouter 2 pour passer d'un nombre impair au suivant.

30) 1.

31) On remarque que $(n+1)(n+2)(2n+3) = n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2$.

32) Pour l'hérédité, on utilise la relation $A^{n+1} = A \times A^n$.

33) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

34) $A^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$.

35) On remarque que $(1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2$.

36) L'hérédité se montre facilement pour $n \geqslant 1$, et on vérifie la propriété aux rangs 0 et 1.

37) On remarque que $3^{n+1} - 2^{n+1} = 3^n + 2(3^n - 2^n)$.

38) $n_0 = 6$, pour l'hérédité on étudie d'abord l'inégalité $2n + 5 \leqslant 2^n$.

39) On montre que $u : x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = -e^{-x}$.

40) On remarque que $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

41) On procède par récurrence sur n.

42) On procède par récurrence sur n.

43) $u_n = \dfrac{1}{2^{n+1} - 1}$.

44) On cherche une formule explicite $u_n = \lambda \times 3^n + \mu$ avec λ, μ indépendants de n.

45) On procède par récurrence forte sur n en remarquant que $3^{n+1} = 3 \times 3^n$ et $2^{n+1} = 2 \times 2^n$.

46) $u_n = \dfrac{3^{n+1} - (-2)^{n+1}}{5}$.

47) $\dfrac{61}{20}$.

48) $(n+1)^2$.

49) Pour l'hérédité, on remarque que $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

50) Pour l'hérédité, on remarque que $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{k=n} k^2\right) + (n+1)^2$.

51) -45.

52) $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

53) 5.

54) 1.

55) Pour l'hérédité, on remarque que si u est une fonction dérivable ne s'annulant pas alors $\dfrac{1}{u^n}$ est aussi dérivable avec $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = \dfrac{-nu'}{u^{n+1}}$.

56) $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

57) Pour l'hérédité, on remarque pour la minoration que $n + 2 \geqslant n + 1$.

58) $(n+1)! - 1$.

59) 2500.

60) $\dfrac{1023}{1024}$.

61) $\dfrac{1}{3}\left(2^{2n+3} - 2\right)$.

62) $2^{\left[(n+1)^2\right]}$.

63) $f([-2;0]) = \left[\frac{3}{4};3\right]$ et $f^{-1}([-1;1]) = [-1;0]$.

64) $f([-2;2]) = [-7;20]$ et $f^{-1}([-7;20]) = \left[-\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right]$.

65) f n'est pas surjective et f est injective.

66) On étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-1;1]$.

67) On résout l'équation $f(x;y) = (a;b)$.

68) On résout l'équation $f(m) = f(n)$ dans les cas où m et n sont ou ne sont pas de même parité.

69) On calcule $f(2k)$ et $f(2k-1)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

70) $\mathrm{Card}(E) = 6$.

71) On montre par récurrences que $n^3 \leqslant 2^n$ pour $n \geqslant 10$ en prouvant d'abord $6n+6 \leqslant 2^n$ et $3n^2+3n+1 \leqslant 2^n$.

72) 6.

73) 0 si $p > n$ et $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ sinon.

74) $7 + \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = 28$ dominos.

75) 121 et 55.

76) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 28 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 28 \\ 2 \end{pmatrix} = 1540$.

77) $\frac{13\times 48}{\binom{52}{5}} = \frac{13\times48\times1\times2\times3\times4\times5}{52\times51\times50\times49\times48} = \frac{1}{17\times5\times49} = \frac{1}{4165}$.

78) $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ admet $5\times3\times2 = 30$ diviseurs.

79)
1. $(2n)!$: on place d'abord un individu sur une place donnée puis les autres successivement en tournant autour de la table.
2. $2(n!)^2$: $2n \times n \times (n-1) \times (n-1) \times (n-2) \times (n-2) \ldots$.
3. $2^{n+1}n!$ si $n > 1$ et 2 si $n = 1$: une fois placé le premier individu, il y a deux façons de placer son conjoint si $n > 1$, pour les couples suivants il n'y a qu'une façon de placer le conjoint.
4. $4n!$ si $n > 1$ et 2 si $n = 1$.

80) 233.

81) n et $\frac{n(n-1)}{2}$.

82) La somme vaut $f'(0) = n2^{n-1}$.

83) $M^n = \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

84) $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & n(2n+1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.