X. Polynômes

1 Polynômes à une indéterminée

Définition 1. *On appelle* **polynôme d'indéterminée** X *à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *une expression de la forme* $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = \sum_{k=0}^{k=n} a_kX^k$ *où* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sont des nombres réels ou complexes appelés* **coefficients** *du polynôme* $P(X)$.

On note $\mathbb{R}[X]$ *l'ensemble des polynômes à coefficients réels.*

On note $\mathbb{C}[X]$ *l'ensemble des polynômes à coefficients complexes.*

Exercice 1. *Montrer que* $P(X) = 2X^2 - X + 1$ *et* $Q(X) = X^5 - 1$ *sont des polynômes et déterminer leurs coefficients.*

Remarque 1. *Le polynôme* $2X^2 - X + 1$ *et la fonction polynomiale* $f : x \mapsto 2x^2 - x + 1$ *sont des objets mathématiques distincts, nous montrerons cependant que l'on peut identifier un polynôme avec sa fonction polynomiale associée.*

Définition 2. *On appelle :*
- **polynôme nul** *le polynôme* $P(X) = 0$,
- **polynôme unité** *le polynôme* $P(X) = 1$,
- **polynôme constant** *un polynôme de la forme* $P(X) = a_0$ *avec* a_0 *un nombre réel ou complexe,*
- **monôme** *un polynôme de la forme* $P(X) = a_kX^k$ *avec* a_k *un nombre réel ou complexe.*

Définition 3. *On appelle* **degré** *d'un polynôme non nul* $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = \sum_{k=0}^{k=n} a_kX^k$ *et on note* $\deg(P)$ *le plus grand indice* $k \in [\![0, n]\!]$ *tel que* $a_k \neq 0$, *on convient que* $\deg(0) = -\infty$.

Le coefficient du monôme non nul de plus haut degré est appelé **coefficient dominant** *du polynôme* $P(X)$.

Un polynôme de coefficient dominant égal à 1 *est dit* **unitaire**.

Exemple 1. $X^5 - 1$ *est un polynôme unitaire de degré* 5.

Exercice 2. *Déterminer le degré du polynôme* $P(X) = \sum_{k=0}^{k=5} (2^{k-4} - k + 3)X^k$.

Définition 4. **Opérations sur les polynômes**

Étant donnés deux polynômes $P(X) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$ *et* $Q(X) = \sum_{k=0}^{k=m} b_k X^k$ *et un scalaire* λ *réel ou complexe, on définit les polynômes :*

- $(\lambda P)(X) = \sum_{k=0}^{k=n} c_k X^k$ *avec :*

$$\begin{array}{rcl} c_0 & = & \lambda a_0 \\ c_1 & = & \lambda a_1 \\ c_2 & = & \lambda a_2 \\ & \vdots & \\ c_k & = & \lambda a_k \text{ pour tout } k \in [\![0;n]\!] \end{array}$$

- $(P+Q)(X) = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} c_k X^k$ *avec :*

$$\begin{array}{rcl} c_0 & = & a_0 + b_0 \\ c_1 & = & a_1 + b_1 \\ c_2 & = & a_2 + b_2 \\ & \vdots & \\ c_k & = & a_k + b_k \text{ pour tout } k \in [\![0;\max(n,m)]\!] \text{ en convenant que } a_k = 0 \text{ si } k > n \text{ et } b_k = 0 \text{ si } k > m \end{array}$$

- $(P \times Q)(X) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$ *avec :*

$$\begin{array}{rcl} c_0 & = & a_0 b_0 \\ c_1 & = & a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ c_2 & = & a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\ & \vdots & \\ c_k & = & \displaystyle\sum_{i+j=k} a_i b_j \text{ pour tout } k \in [\![0;n+m]\!] \text{ en convenant que } a_i = 0 \text{ si } i > n \text{ et } b_j = 0 \text{ si } j > m \end{array}$$

Propriété 1. *Pour tous polynômes* P, Q, R *à coefficients réels ou complexes, on a :*

- $(P+Q)+R = P+(Q+R)$ *(associativité de l'addition)*
- $P+Q = Q+P$ *(commutativité de l'addition)*
- $(P \times Q) \times R = P \times (Q \times R)$ *(associativité de la multiplication)*
- $P \times Q = Q \times P$ *(commutativité de la multiplication)*
- $P \times (Q+R) = P \times Q + P \times R$ *(distributivité de la multiplication par rapport à l'addition)*

Exercice 3. *On considère les polynômes* $P = X^2+1$ *et* $Q = X^3+X$*, calculer le polynôme* $(P+Q)^2$.

Propriété 2. *On considère deux polynômes* P *et* Q *non nuls à coefficients réels ou complexes, alors* $\boxed{\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)}$.

Remarque 2. *Dans le cas où un des deux polynômes est nul, la propriété reste valable en convenant que* $(-\infty)+m = n+(-\infty) = -\infty$ *et* $(-\infty)+(-\infty) = -\infty$.

Exercice 4. *Étant donnés deux polynômes* P *et* Q *non nuls à coefficients réels ou complexes, a-t-on* $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$ *?*

2 Arithmétique dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$

On se place désormais dans $\mathbb{K}[X]$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 5. *On considère $A, B \in \mathbb{K}[X]$. S'il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = B \times C$ on dit que A est un* **multiple** *de B et que B est un* **diviseur** *de A.*

Exemple 2. *Les polynômes $X - 1$ et $X + 2$ sont des diviseurs du polynôme $X^2 + X - 2$ car $(X - 1)(X + 2) = X^2 + X - 2$.*

Remarque 3. *Un polynôme non nul est divisible par n'importe quel polynôme constant non nul, par exemple le polynôme $X^2 + X - 2$ est divisible par 3 car $X^2 + X - 2 = 3(\frac{1}{3}X^2 + \frac{1}{3}X - \frac{2}{3})$.*

Propriété 3. *Si un polynôme B divise un polynôme A non nul alors $\deg(B) \leqslant \deg(A)$.*

Exercice 5. *Déterminer tous les diviseurs unitaires de degré 1 ou 2 du polynôme $X^3 + X$ dans $\mathbb{C}[X]$ en cherchant les coefficients a, b, c tels que $X^3 + X = (X + a)(X^2 + bX + c)$.*

Propriété 4. Division euclidienne
On considère $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$ alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que $A = B \times Q + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$, les polynômes Q et R sont respectivement appelés **quotient** *et* **reste** *de la* **division euclidienne** *de A par B.*

Exemple 3. *division euclidienne du polynôme $3X^3 - 2X^2 + 2$ par le polynôme $X - 1$*

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3X^3 & -2X^2 & & +2 & X-1 \\ \cline{5-5}
-(3X^3 & -3X^2) & & & 3X^2 \\
 & X^2 & & +2 & \\
 & -(X^2 & -X) & & X \\
 & & X & +2 & \\
 & & -(X & -1) & 1 \\
 & & & 3 &
\end{array}
$$

On a donc $3X^3 - 2X^2 + 2 = (X - 1)(3X^2 + X + 1) + 3$.

Exercice 6. *Effectuer la division euclidienne du polynôme $X^3 + X^2 + X + 1$ par le polynôme $X + 3$.*

Propriété 5. *On considère $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$ alors B est un diviseur de A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.*

Exercice 7. *Montrer que le polynôme $X^2 + 1$ est un diviseur du polynôme $X^5 + 2X^2 - X + 2$.*

Exercice 8. *Montrer que la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^3 + x^2}{x^2 + 2}$ admet une asymptote oblique en $\pm\infty$ et en donner une équation réduite.*

3 Racines d'un polynôme

Définition 6. *On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une* **racine** *du polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}$ si $P(\alpha) = 0$.*

Remarque 4. *Dans cette définition, $P(\alpha)$ représente l'image de α par la fonction polynomiale associée au polynôme P.*

Exercice 9. *Déterminer les racines du polynôme $X^3 + X$ dans $\mathbb{C}$.*

Propriété 6. $\boxed{\text{Un polynôme de } \mathbb{K}[X] \text{ admet } \alpha \in \mathbb{K} \text{ pour racine si et seulement si il est divisible par } X - \alpha.}$

Exercice 10. *Déterminer les racines réelles du polynôme $X^3 - 2X + 1$. (on pourra chercher une racine évidente)*

Définition 7. *Étant donnée une racine α d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, on définit son* **ordre de multiplicité** *comme le plus grand entier m tel que $(X - \alpha)^m$ divise P.*

Remarque 5. *L'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme P non nul est un entier compris entre 1 et $\deg(P)$.*

Exercice 11. *Montrer que 1 est une racine du polynôme $X^4 - X^3 - X + 1$ et déterminer son ordre de multiplicité.*

Propriété 7. *Si un polynôme non nul admet p racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ d'ordres de multiplicité respectifs $m_1, m_2, \dots, m_p$ alors P est divisible par $(X - \alpha_1)^{m_1}(X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_p)^{m_p}$.*

Corollaire 1. *Un polynôme non nul de degré n possède au plus n racines comptées avec leur ordre de multiplicité.*

Exemple 4. *Le polynôme $(X+3)(X-4)^2$ de degré 3 admet -3 et 4 pour racines et leurs ordres de multiplicité sont 1 et 2 donc il admet 3 racines en comptant avec leurs ordres de multiplicité.*

Exercice 12. *Déterminer un polynôme à coefficients réels de degré 3 tel que la somme des ordres de multiplicité de ses racines réelles soit strictement inférieure à 3.*

Corollaire 2. *Un polynôme admettant une infinité de racines distinctes est nul.*

Corollaire 3. *Une fonction polynomiale est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. Deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si elles ont mêmes coefficients.*

4 Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles

Définition 8. *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit* **irréductible** *dans $\mathbb{K}[X]$ s'il est de degré supérieur ou égal à 1 et si ses seuls diviseurs sont les polynômes λ et λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.*

Remarque 6. *Un polynôme irréductible n'admet pas de factorisation non triviale.*

Exemple 5. *Le polynôme X^2-1 n'est pas irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ car $X^2-1=(X-1)(X+1)$, les polynômes $X-1$ et $X+1$ sont irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.*

Propriété 8. *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 1 est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.*

Exercice 13. *Montrer que le polynôme X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais réductible dans $\mathbb{C}[X]$.*

Propriété 9. *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 admettant une racine dans $\mathbb{K}$ est réductible dans $\mathbb{K}[X]$.*

Exercice 14. *Déterminer un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ réductible dans $\mathbb{R}[X]$ qui n'admet pas de racine réelle.*

Théorème 1. Théorème fondamental de l'algèbre

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Corollaire 4. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.*

Propriété 10. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, si α est une racine complexe de P alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P avec la même multiplicité.*

Propriété 11. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 n'admettant pas de racine réelle.*

Théorème 2. Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 se décompose de manière unique en produit d'une constante non nulle et de polynômes irréductibles unitaires à l'ordre des facteurs près.

Exercice 15. *Décomposer le polynôme X^3-X^2+X-1 en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.*

Corollaire 5. *Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ peut s'écrire sous la forme $P(X)=\lambda(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}\dots(X-\alpha_p)^{m_p}$ avec λ un nombre complexe et $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$ des nombres complexes distincts, on dit que P est un* **polynôme scindé**.

Remarque 7. *Si P est non nul, on a $m_1+m_2+\dots+m_p=\deg(P)$.*

Exercice 16. *Décomposer le polynôme X^3+X^2+X+1 en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.*

Corollaire 6. *Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ peut s'écrire sous la forme $P(X)=\lambda(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}\dots(X-\alpha_p)^{m_p}(X^2+\beta_1X+\gamma_1)^{n_1}(X^2+\beta_2X+\gamma_2)^{n_2}\dots(X^2+\beta_qX+\gamma_q)^{n_q}$ avec λ un nombre réel et $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$; $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_q$ et $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_q$ des nombres réels avec $\beta_k^2-4\gamma_k<0$ pour tout $k \in [\![1,q]\!]$.*

Exercice 17. *Décomposer le polynôme $4X^3-4X^2+X-1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.*

Propriété 12. Somme et produit des racines d'un polynôme scindé

On considère un polynôme de degré $n \geqslant 1$ scindé $P(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+\dots+a_nX^n=\lambda(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_n)$ alors $\boxed{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}}$ et $\boxed{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}}$.

Exercice 18. *Montrer que le polynôme X^3-3X-1 admet trois racines réelles et déterminer leur somme et leur produit.*

5 Polynôme dérivé

Définition 9. *On appelle* **polynôme dérivé** *d'un polynôme* $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$ *le polynôme* $P'(X) = \begin{cases} 0 \ , \ si\ n = 0 \\ a_1 + 2a_2 X + \cdots + n a_n X^{n-1} = \sum_{k=1}^{k=n} k a_k X^{k-1} \ , \ si\ n > 0 \end{cases}$.

Propriété 13. *On considère* $P \in \mathbb{K}[X]$ *alors* $\boxed{\deg(P') = \begin{cases} -\infty \ , \ si\ \deg(P) \leqslant 0 \\ \deg(P) - 1 \ , \ si\ \deg(P) > 0 \end{cases}}$.

Propriété 14. *Si* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$ *alors* $(P+Q)' = P' + Q'$, $(\lambda P)' = \lambda P'$ *et* $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

Remarque 8. *On peut également définir par récurrence la dérivée* k*-ième d'un polynôme.*

Exercice 19. *On considère* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, *déterminer* $(PQ)''$ *et* $(PQ)'''$.

Théorème 3. **Formule de Leibniz**
On considère deux polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *alors :*

$$\boxed{(P \times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}}$$

Exercice 20. *Exprimer la dérivée 3-ième de* $P(X)Q(X)$ *puis de* $X^3 P(X)$ *à l'aide de la formule de Leibniz.*

Propriété 15. *On note* $P(X) = X^n$ *avec* $n \in \mathbb{N}$, *alors* $P^{(k)}(X) = \dfrac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$ *pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$.

Exercice 21. *On considère le polynôme* $P(X) = X^n$, *calculer* $P^{(k)}(0)$ *pour* $k \in [\![0, n]\!]$.

Théorème 4. **Formule de Taylor en** 0
On considère un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ *de degré* $n \in \mathbb{N}$ *alors :*

$$\boxed{P(X) = P(0) + P'(0)X + \frac{P''(0)}{2!} X^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!} X^n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k}$$

Corollaire 7. **Formule de Taylor en** α
On considère un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ *de degré* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$ *alors :*

$$\boxed{P(X) = P(\alpha) + P'(\alpha)(X-\alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2!}(X-\alpha)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k}$$

Corollaire 8. *On considère un polynôme* $P \in \mathbb{K}[X]$ *non nul alors* $\alpha \in \mathbb{K}$ *est une racine d'ordre* m *de* P *si et seulement si* $P(\alpha), P'(\alpha), \ldots, P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ *et* $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Exercice 22. *Montrer que* 1 *est une racine du polynôme* $X^4 - X^3 - X + 1$ *et déterminer son ordre de multiplicité.*

Exercices supplémentaires

Exercice 23

On considère le polynôme $P(X) = X^2 - X + 1$. Calculer $(P(X))^2$ et $P(P(X))$.

Exercice 24

Déterminer le degré du polynôme $P(X) = (1 + X^2)(2 + X^2)(3 + X^2) - (3X + X^3)^2$.

Exercice 25

Déterminer un polynôme P tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = 4$ et $P(3) = 8$.

Exercice 26 ($\star$)

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} X^k(1 - X)^{n-k}$.
Calculer $P_0(X)$, $P_1(X)$, $P_2(X)$ et $P_3(X)$, que peut-on dire de $P_n(X)$ pour $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 27 ($\star$)

Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est pair si et seulement si il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^2)$.

Exercice 28 ($\star$)

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $P_n(X) = (X^2 + 1)^n + (X^2 - 1)^n - 2X^{2n}$.
Calculer $P_0(X)$, $P_1(X)$, $P_2(X)$ et $P_3(X)$ puis déterminer le degré de $P_n(X)$ en fonction de n.

Exercice 29

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant l'égalité $\big(P(X)\big)^2 = XP(2X + 3) + 4$.
(on pourra commencer par déterminer le degré de P)

Exercice 30 ($\star$)

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant l'égalité $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.
(on pourra commencer par déterminer le degré de P)

Exercice 31 ($\star$)

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant l'égalité $P(P(X)) = P(X)$.
(on pourra commencer par déterminer le degré de P)

Exercice 32 ($\star$)

Montrer que X^2 divise $(X + 1)^n - nX - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(on pourra commencer par déterminer les coefficients des monômes de degré 0 et 1)

Exercice 33

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^3 + X^2 + 9$ par $X^2 - 2X + 3$.

Exercice 34

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^4 + iX^2 + 1$ par $X^2 + iX + 1$.

Exercice 35 ($\star$)

Déterminer les réels a et b tels que le polynôme $X^2 + aX + 1$ divise le polynôme $X^4 + bX^2 + 1$.

Exercice 36 ($\star$)

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 3 dont le reste de la division euclidienne par $X^2 - 1$ est $1 - X$ et dont le reste de la division euclidienne par $X^2 + 1$ est $X - 1$.

Exercice 37 ($\star$)

On considère deux nombres complexes α et β distincts et un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - \alpha)(X - \beta)$ en fonction de $P(\alpha)$ et $P(\beta)$.

Exercice 38

Déterminer les racines réelles ou complexes des polynômes $X^3 - 1$ et $X^4 - 1$.

Exercice 39

Déterminer les racines réelles ou complexes du polynôme $X^4 + X^3 - 2X^2 - X + 1$.

Exercice 40 ($\star$)

Déterminer les racines réelles ou complexes du polynôme $X^5 - 1$.

Exercice 41

On considère le polynôme $P(X) = X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 + 2X + 1$. Montrer que -1 est racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.

Exercice 42

Décomposer le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 + 2iX - 2i$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 43

Décomposer le polynôme $P(X) = X^4 - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 44

Décomposer le polynôme $P(X) = X^3 - 2X^2 + 2X$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 45

Montrer que i est une racine complexe du polynôme $P(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$, en déduire une factorisation de $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 46 ($\star$)

Décomposer le polynôme $X^n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 47

Montrer que le polynôme $X^3 - X^2 - 2X + 1$ admet trois racines réelles distinctes α, β et γ et déterminer pour chacune de ces racines un encadrement par deux entiers consécutifs, calculer leur somme et leur produit.

Exercice 48 ($\star$)

Déterminer les racines complexes du polynôme $4X^3 + 24X^2 + 47X + 33$ sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

Exercice 49 ($\star\star$)

Déterminer un polynôme de degré 3 admettant trois racines distinctes α, β et γ vérifiant $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2$ et $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3$.

Exercice 50 ($\star$)

On considère un nombre complexe α et un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - \alpha)^2$ en fonction de $P(\alpha)$ et $P'(\alpha)$.

Exercice 51 ($\star$)

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $3P(X) = XP'(X) + P''(X)$.
(on pourra commencer par déterminer le degré de P)

Exercice 52 ($\star$)

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant l'égalité $P'^2 = 4P$.
(on pourra commencer par déterminer le degré de P)

Exercice 53 ($\star$)

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant l'égalité $P' + P = \dfrac{1}{n!}X^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 54

Déterminer un polynôme P tel que $P(0) = 1$, $P'(0) = 2$, $P''(0) = 4$ et $P'''(0) = 8$.

Exercice 55

Déterminer $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(1) = 0$, $P'(1) = 1$, $P''(1) = 2$ et $P^{(k)}(1) = 0$ pour tout $k \geqslant 3$.

Exercice 56

Montrer que le polynôme $P(X) = 1 - X + X^2 - 9X^9 + 8X^{10}$ est divisible par $(X - 1)^2$.

Exercice 57 ($\star$)

Déterminer $z \in \mathbb{C}$ pour que le polynôme $P(X) = X^3 + 3X + z$ admette une racine double, factoriser dans ce cas le polynôme $P(X)$.

Exercice 58 ($\star$)

Montrer que 1 est racine du polynôme $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et déterminer son ordre.

Exercice 59 ($\star\star$)

Montrer que le polynôme $X^{n+2} - X + 1$ n'admet que des racines simples pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 60 ($\star\star$)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{X^k}{k!}$ possède n racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

Réponses

1) $P(X) = 1X^0 + (-1)X^1 + 2X^2$ et $Q(X) = -1X^0 + 0X^1 + 0X^2 + 0X^3 + 0X^4 + 1X^5$.

2) $a_5 = a_4 = 0$ et $a_3 = \frac{1}{2} \neq 0$.

3) $(P+Q)^2 = 1 + 2X + 3X^2 + 4X^3 + 3X^4 + 2X^5 + X^6$.

4) On considère $P(X) = 1 + X^2$ et $Q(X) = 1 - X^2$.

5) X, $X - i$, $X + i$ et $X^2 - iX$, $X^2 + iX$, $X^2 + 1$.

6) $X^3 + X^2 + X + 1 = (X+3)(X^2 - 2X + 7) - 20$.

7) $X^5 + 2X^2 - X + 2 = (X^2+1)(X^3 - X + 2)$.

8) On montre que $f(x) = 2x + 1 - \dfrac{4x+2}{x^2+2}$.

9) 0, i et $-i$.

10) 1, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

11) 1 est racine d'ordre 2 du polynôme $X^4 - X^3 - X + 1$.

12) $X(X^2+1)$.

13) On cherche un diviseur unitaire de degré 1.

14) $(X^2+1)^2$.

15) $X^3 - X^2 + X + 1 = (X-1)(X^2+1) = (X-1)(X-i)(X+i)$.

16) $X^3 + X^2 + X + 1 = (X+1)(X-i)(X+i)$.

17) $4X^3 - 4X^2 + X - 1 = (X-1)(4X^2+1)$.

18) La fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x - 1$, s'annule en α, β et γ avec $-2 \leqslant \alpha \leqslant -1$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 0$ et $1 \leqslant \gamma \leqslant 2$ de plus $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et $\alpha\beta\gamma = 1$.

19) $(PQ)'' = P''Q + 2P'Q' + PQ''$ et $(PQ)''' = P'''Q + 3P''Q' + 3P'Q'' + PQ'''$.

20) $(PQ)''' = P'''Q + 3P''Q' + 3P'Q'' + PQ'''$ d'où $6P + 18XP' + 9X^2P'' + X^3P'''$.

21) $P^{(k)}(0) = 0$ si $k < n$ et $P^{(n)}(0) = n!a_n$.

22) On a $P(1) = P'(1) = 0$ et $P''(1) \neq 0$.

23) $(P(X))^2 = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1$ et $P(P(X)) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - X + 1$.

24) $P(X) = 6 + 2X^2$.

25) $P(X) = \frac{1}{6}X^3 + \frac{5}{6}X + 1$.

26) $P_n(X) = [X + (1-X)]^n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

27) On montre que $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} a_k X^{2k}$.

28) $\deg(P) = -\infty$ si $n < 2$ et $\deg(P) = 2n - 4$ si $n \geqslant 2$.

29) $P(X) = 2(X+1)$.

30) $P(X) = a(X^2 - 1)$ avec $a \in \mathbb{C}$.

31) P est un polynôme constant ou le polynôme identité.

32) $a_0 = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} - 1 = 0$ et $a_1 = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} - n = 0$.

33) $Q(X) = X + 3$ et $R(X) = 3X$.

34) $Q(X) = X^2 - iX + (-2+i)$ et $R(X) = (1+3i)X + (3-i)$.

35) $R(X) = a(2-b-a^2)X + (2-b-a^2)$ d'où $a^2+b=2$.

36) $P(X) = -X^3 + X^2$.

37) $R(X) = \dfrac{P(\alpha)-P(\beta)}{\alpha-\beta}X + \dfrac{\alpha P(\beta)-\beta P(\alpha)}{\alpha-\beta}$.

38) $1; -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $1; i; -1; -i$.

39) Les racines sont 1, -1, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ car $P(X) = (X-1)(X+1)(X^2+X-1)$.

40) $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ pour $k = 0,1,2,3,4$ car le nombre de racines ne peut pas être supérieur au degré du polynôme.

41) -1 est une racine d'ordre 3 du polynôme P car $P(X) = (X+1)^3(X^2-X+1)$.

42) $P(X) = (X-1)(X-1+i)(X+1-i)$.

43) $P(X) = (X-1)(X+1)(X^2+1) = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$.

44) $P(X) = X(X^2-2X+2) = X(X-1-i)(X-1+i)$

45) $P(X) = (X^2+1)(X^2+X+1)$.

46) $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{k=n-1}(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$.

47) $-2 < \alpha < -1$, $0 < \beta < 1$, $1 < \gamma < 2$ de plus $\alpha+\beta+\gamma = 1$ et $\alpha\beta\gamma = -1$.

48) -3, $\dfrac{-3-i\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{-3+i\sqrt{2}}{2}$.

49) $6X^3 - 6X^2 - 3X - 1$.

50) $P(X) = P'(\alpha)(X-\alpha) + P(\alpha)$.

51) $P(X) = aX(X^2+3)$ avec $a \in \mathbb{C}$.

52) $P = 0$ ou $P = (X+a)^2$ avec $a \in \mathbb{C}$.

53) $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!}X^k$.

54) $P(X) = 1 + 2X + 2X^2 + \dfrac{4}{3}X^3$.

55) $P(X) = 0 + 1(X-1) + 2\dfrac{(X-1)^2}{2!} = X^2 - X$.

56) On remarque que $P(1) = P'(1) = 0$.

57) $z = -2i$ et $P(X) = (X+2i)(X-i)^2$ ou $z = 2i$ et $P(X) = (X-2i)(X+i)^2$.

58) 1 est racine d'ordre 2.

59) Une racine double α de P est racine de P', on obtient $\alpha = \dfrac{n+2}{n+1} > 1$ et $\alpha^{n+1} = \dfrac{1}{n+2} < 1$.

60) On remarque que $P_n(X) = \dfrac{X^n}{n!} + P_n'(X)$ et on en déduit que P_n ne possède pas de racine d'ordre supérieur ou égal à 2.