XIV. Applications linéaires

1 Applications linéaires

Définition 1. *On dit qu'une application $f : E \to F$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels est* **linéaire** *si pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ on a $f(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) = \lambda f(\overrightarrow{u}) + \mu f(\overrightarrow{v})$. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.*

Remarque 1. *L'image par une application linéaire d'une combinaison linéaire de vecteurs est égale à la combinaison linéaire de leurs images.*

Remarque 2. *Si f est linéaire, $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$.*

Remarque 3. *$\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Exemple 1. *Une homothétie vectorielle de rapport $k \in \mathbb{K}$ est une application linéaire :*

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \overrightarrow{u} & \mapsto & k\overrightarrow{u} \end{array}$$

Exemple 2. *La dérivation est une application linéaire :*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

Exercice 1. *Montrer que l'application* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$ *est linéaire.*

Définition 2.
- *Une application linéaire de E dans E est appelée un* **endomorphisme**, *on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.*
- *Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelée une* **forme linéaire**.

Exercice 2. *Donner un exemple de forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ puis donner un exemple de forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 3. *L'application $f \mapsto f \circ f$ est-elle un endomorphisme de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?*

Propriété 1. *La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

Définition 3. *Une application linéaire bijective est appelée un* **isomorphisme**.

Propriété 2. *L'application réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.*

Définition 4. *Un endomorphisme bijectif est appelé un* **automorphisme**, *on appelle* **groupe linéaire** *et on note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.*

Exercice 4. *Montrer que l'application f de l'exercice 1 est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et expliciter son application réciproque.*

2 Noyau et image d'une application linéaire

Propriété 3. *On considère $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et E', F' deux sous-espaces vectoriels respectifs des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, alors :*
- *L'image directe $f(E') = \{f(\overrightarrow{u}) \ / \ \overrightarrow{u} \in E'\}$ de E' est un sous-espace vectoriel de F.*
- *L'image réciproque $f^{-1}(F') = \{\overrightarrow{u} \in E \ / \ f(\overrightarrow{u}) \in F'\}$ de F' est un sous-espace vectoriel de E.*

Définition 5. *On considère $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*
- *on appelle* **noyau** *de f,* $\boxed{\operatorname{Ker} f = f^{-1}\left(\left\{\overrightarrow{0_F}\right\}\right) = \left\{\overrightarrow{u} \in E \ / \ f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0_F}\right\}}$.
- *on appelle* **image** *de f,* $\boxed{\operatorname{Im} f = f(E) = \{f(\overrightarrow{u}) \ / \ \overrightarrow{u} \in E\}}$.

Remarque 4. $\operatorname{Ker} f$ *est un sous-espace vectoriel de E et* $\operatorname{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de F.*

Exercice 5. *Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.

Exercice 6. *Déterminer le noyau et l'image de la forme linéaire* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & x+y+z \end{array}$.

Propriété 4. *On considère $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors :*
- *f est injective si et seulement si* $\operatorname{Ker} f = \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$.
- *f est surjective si et seulement si* $\operatorname{Im} f = F$.

Définition 6. *On appelle* **équation linéaire** *d'inconnue $\overrightarrow{u}$ une équation de la forme $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ avec $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in F$.*

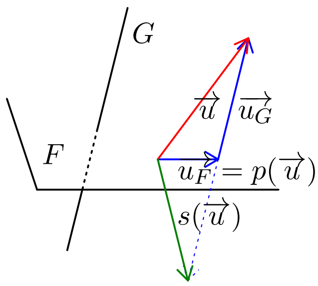
Remarque 5. *L'équation linéaire $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ est compatible si $\overrightarrow{v} \in$* $\operatorname{Im} f$ *et l'ensemble des solutions est $f^{-1}(\{\overrightarrow{v}\})$,* $\operatorname{Ker} f$ *est l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène associée.*

Exercice 7. *Montrer que l'équation différentielle $y + y' = e^t$ où $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est une équation linéaire et déterminer l'ensemble de ses solutions.*

3 Projections et symétries

Définition 7. *On considère deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ il existe un unique couple $(\overrightarrow{u_F}, \overrightarrow{u_G}) \in F \times G$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_F} + \overrightarrow{u_G}$:*

- *l'application linéaire $p : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \overrightarrow{u} & \mapsto & \overrightarrow{u_F} \end{array}$ est appelée* **projection** *(ou* **projecteur***) sur F parallèlement à G,*
- *l'application linéaire $s : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \overrightarrow{u} & \mapsto & \overrightarrow{u_F} - \overrightarrow{u_G} \end{array}$ est appelée* **symétrie** *par rapport à F parallèlement à G.*



Remarque 6. *p est un endomorphisme de E et $p \circ p = p$, $s \circ s = Id_E$ donc s est un automorphisme d'application réciproque s.*

Exemple 3. *L'application linéaire $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$ est une projection.*

Exemple 4. *L'application linéaire $s : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{array}$ est une symétrie.*

Exercice 8. *On considère p projection sur F parallèlement à G, déterminer* $\mathrm{Ker}\, p$ *et* $\mathrm{Im}\, p$.

Exercice 9. *On considère s symétrie par rapport à F parallèlement à G, déterminer* $\mathrm{Ker}\, s$, $\mathrm{Im}\, s$, $\mathrm{Ker}(s - Id)$ *et* $\mathrm{Ker}(s + Id)$.

Propriété 5. *Un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que $f \circ f = f$ est une projection sur* $\mathrm{Im}\, f$ *parallèlement à* $\mathrm{Ker}\, f$.

Exercice 10. *Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X) - P(0) \end{array}$ est une projection et déterminer ses éléments caractéristiques.*

Propriété 6. *Un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que $f \circ f = Id_E$ est une symétrie par rapport à* $\mathrm{Ker}(f - Id_E)$ *parallèlement à* $\mathrm{Ker}(f + Id_E)$.

Exercice 11. *Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X) - 2P(0) \end{array}$ est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.*

4 Applications linéaires en dimension finie

Propriété 7. *On considère une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie ainsi qu'une famille $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \dots, \overrightarrow{e}_n)$ génératrice de E, alors $(f(\overrightarrow{e}_1), f(\overrightarrow{e}_2), \dots, f(\overrightarrow{e}_n))$ est une famille génératrice de $f(E)$.*

Exercice 12. *Déterminer une base de l'image de l'application linéaire* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X) - XP'(X) \end{array}$.

Définition 8. *On appelle* **rang** *d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie,* $\boxed{\text{rg } f = \dim(\text{Im } f)}$.

Exercice 13. *Déterminer le rang de l'application linéaire* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X) - XP'(X) \end{array}$.

Remarque 7. *Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est surjective si et seulement si* $\text{rg } f = \dim F$.

Théorème 1. **Théorème du rang**

On considère une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors :

$$\text{rg } f = \dim E - \dim(\text{Ker } f)$$

Exercice 14. *Déterminer le rang de l'application* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ -x+y \end{pmatrix} \end{array}$.

Remarque 8. *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective, nécessairement* $\dim E = \dim F$.

Exercice 15. *Construire un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.*

Corollaire 1. *On considère une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie avec $\dim E = \dim F$, alors :*

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

Contre-exemple 1. *L'application linéaire* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ *est surjective mais pas injective.*

Exercice 16. *Montrer que* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} & \mapsto & aX^2 + bX + c \end{array}$ *est un isomorphisme.*

Exercice 17. *Montrer que* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix} \end{array}$ *est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.*

5 Représentation matricielle d'une application linéaire

Propriété 8. *Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie est entièrement déterminée par l'image $(f(\overrightarrow{e}_1), f(\overrightarrow{e}_2), \dots, f(\overrightarrow{e}_n))$ d'une base quelconque $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \dots, \overrightarrow{e}_n)$ de E.*

Exercice 18. *Déterminer l'application linéaire f telle que $f(\overrightarrow{e}_1) = \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2$ et $f(\overrightarrow{e}_2) = \overrightarrow{e}_1$ où $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*

Définition 9. *On considère une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{C}$.*

On appelle matrice de f de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$ et on note $\underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathcal{M}at}\, f$ la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ par l'application f.

Si on pose $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$, $\mathcal{C} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n})$ et $\underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathcal{M}at}\, f = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ alors $f(\overrightarrow{u_j}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} a_{ij}\overrightarrow{v_i}$ pour tout $j \in [\![1;p]\!]$.

Remarque 9. *La matrice de l'application identité de E dans E où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est la matrice I_n.*

Exercice 19. *On considère l'application linéaire $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$. Déterminer la matrice de f de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_1[X]$ puis la matrice de f de la base $\mathcal{B}' = (1, 1+X, 1+X+X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base $\mathcal{C}' = (1, 1+X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$.*

Remarque 10. *Dans le cas où f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$, on note $\underset{\mathcal{B}}{\mathcal{M}at}\, f$ et on appelle matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ la matrice de f de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Exercice 20. *Déterminer la matrice de l'application linéaire $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix} \end{array}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*

Propriété 9. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}$ et un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F de dimension n muni d'une base $\mathcal{C}$, alors l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathcal{M}at}\, f \end{array}$ est un isomorphisme.*

Remarque 11. *Si E et F sont deux* K*-espaces vectoriels de dimension finie, alors* $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.

Exercice 21. *Déterminer l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*

Propriété 10. *On considère une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{C}$ et on considère un vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ de coordonnées $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ ainsi qu'un vecteur $\overrightarrow{v} \in F$ de coordonnées $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ dans la base $\mathcal{C}$, alors :*

$$\boxed{\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{u}) \Longleftrightarrow V = MU} \quad \text{où } M = \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathcal{M}at}\, f,\ U = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 22. *Interpréter matriciellement puis en terme d'application linéaire le système linéaire suivant :*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & -1 \end{array}\right.$$

Corollaire 2. *On considère deux applications linéaires $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{C}$ et G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{D}$ alors* $\boxed{\underset{\mathcal{B},\mathcal{D}}{\mathcal{M}at}\, g \circ f = \underset{\mathcal{C},\mathcal{D}}{\mathcal{M}at}\, g \times \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathcal{M}at}\, f}$.

Corollaire 3. *Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$ est un isomorphisme si et seulement si sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$ est inversible et dans ce cas la matrice de l'application réciproque de f dans la base $\mathcal{B}$ est M^{-1}.*

Exercice 23. *En utilisant un système linéaire, montrer que la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ *est inversible et calculer son inverse.*

Définition 10. *L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelé* **groupe linéaire** *et noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.*

6 Changement de base

Définition 11. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on appelle* **matrice de passage** *de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice $\underset{\mathcal{B}',\mathcal{B}}{\mathcal{M}at}\, Id_E$.*

Remarque 12. *Les colonnes de la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ représentent les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Propriété 11. *La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est inversible et son inverse est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.*

Exercice 24. *On considère $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et on définit $\overrightarrow{e_1}' = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_2}' = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$. Montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}')$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.*

Propriété 12. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et on définit les matrices colonnes U et U' formées des coordonnées respectives d'un vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors* $\boxed{U = PU'}$.

Remarque 13. *La formule précédente peut également s'écrire $U' = P^{-1}U$.*

Exercice 25. *On considère $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et on définit la base $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}' = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}' = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2})$. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$ dans la base $\mathcal{B}'$.*

Remarque 14. *La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ permet de passer des coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}'$ à ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ (par multiplication matricielle).*

Exercice 26. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 4$, déterminer l'équation cartésienne de $\mathcal{H}$ dans le repère* $\left(O, \overrightarrow{I}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{J}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Propriété 13. *On considère $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, alors en notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$, A la matrice de f de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$ et A' la matrice de f de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{C}'$ on a* $\boxed{A' = Q^{-1}AP}$, *les matrices A et A' sont dites* **équivalentes**.

Remarque 15. *La formule précédente peut également s'écrire* $A = QA'P^{-1}$.

Remarque 16. *Dans le cas d'un endomorphisme de E on a* $\boxed{A' = P^{-1}AP}$, *les matrices A et A' sont dites* **semblables**.

Exercice 27. *Dans le plan muni de sa base canonique, on considère la projection $p : (x,y) \mapsto (x,0)$, déterminer la matrice de p dans la base* $\left(\overrightarrow{e_1}'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2}'\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

7 Rang d'une matrice

Définition 12. *On appelle rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et on note $\mathrm{rg}(A)$ le rang de l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ de matrice A dans leurs bases canoniques.*

Remarque 17. *Le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs colonnes.*

Exercice 28. *Déterminer le rang de la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 29. *Montrer qu'un matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.*

Exercice 30. *Montrer que pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a* $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n,p)$.

Propriété 14. *Le rang d'une matrice est égal au rang du système linéaire associé.*

Propriété 15. *Le rang d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie est égal au rang de sa matrice de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$ où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux bases quelconques de E et F.*

Propriété 16. *Le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs lignes.*

Exercices supplémentaires

Exercice 31

Montrer que $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & \begin{pmatrix} P(0) \\ P'(0) \end{pmatrix} \end{array}$ est une application linéaire.

Exercice 32

Montrer que $\phi: \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x \end{array}$ est une forme linéaire. ϕ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 33 ($\star$)

Montrer qu'une forme linéaire f sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est soit nulle soit surjective.

Exercice 34

Montrer que $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix} \end{array}$ est un automorphisme et déterminer son application réciproque.

Exercice 35

Montrer que $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X)+P'(X)+P''(X) \end{array}$ est un automorphisme et déterminer son application réciproque.

Exercice 36

Montrer que $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix} \end{array}$ est une application linéaire, déterminer son noyau et son image ainsi que leurs dimensions.

Exercice 37 ($\star$)

Montrer que $f: P(X) \mapsto XP'(X) - 2P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, déterminer son noyau et son image ainsi que leurs dimensions.

Exercice 38 ($\star$)

On considère $f, g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que $\mathrm{Im}\ f \subset \mathrm{Ker}\ g$ si et seulement si $g \circ f = 0$.

Exercice 39 ($\star\star$)

On considère $f, g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que $f(\mathrm{Ker}\ g \circ f) = \mathrm{Ker}\ g \cap \mathrm{Im}\ f$.

Exercice 40 ($\star\star$)

Montrer que $f : P \mapsto P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et expliciter son application réciproque.
(on pourra utiliser des dérivées successives)

Exercice 41

Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ / \ x + y = 0 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ / \ x - y = 0 \right\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^2$.

Déterminer le projeté du vecteur $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sur F parallèlement à G ainsi que son symétrique par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 42 ($\star$)

Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P'(1) = P''(1) = 0\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}_2[X]$.

Déterminer le projeté du polynôme $X^2 + X + 1$ sur F parallèlement à G ainsi que son symétrique par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 43

Étant donné $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on définit $p(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x + y \end{pmatrix}$ et $s(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}$.

Montrer que p est un projecteur et s une symétrie et déterminer leurs éléments caractéristiques.

Exercice 44 ($\star$)

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x + y + z = 0 \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ et calculer les coordonnées de l'image d'un vecteur $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ quelconque par la projection sur F parallèlement à G puis par la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 45 ($\star$)

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, déterminer l'image d'un polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ quelconque par la symétrie s par rapport à $\mathrm{Vect}(1 + X + X^2)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(1, X)$.

Exercice 46 ($\star$)

Montrer que $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $s = 2p - Id$ est une symétrie.

Exercice 47 ($\star\star$)

Montrer que si $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie alors $\mathrm{Im}(s + Id) = \mathrm{Ker}(s - Id)$.

Exercice 48

Montrer que $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -2x & + & y & + & z \\ x & - & 2y & + & z \\ x & + & y & - & 2z \end{pmatrix} \end{array}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 49

Montrer que $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$ est une application linéaire et déterminer $\operatorname{rg}(f)$.

Exercice 50 ($\star$)

On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, que peut-on dire de $\operatorname{rg}(-f)$ et $\operatorname{rg}(2f)$?

Exercice 51 ($\star\star$)

On considère $f, g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, montrer que $|\operatorname{rg}\ f - \operatorname{rg}\ g| \leqslant \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}\ f + \operatorname{rg}\ g$.

Exercice 52

On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Montrer que $\operatorname{Ker} f \ \oplus \ \operatorname{Im} f = E$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Exercice 53

Montrer que $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ y+z \\ y-z \end{pmatrix} \end{array}$ est une application linéaire et déterminer sa matrice de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 54

Déterminer l'application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 55

Montrer que $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_1[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$ est une application linéaire et déterminer sa matrice de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 56 ($\star$)

Montrer que $f : P(X) \mapsto XP'(X) - 2P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 57

Dans l'espace muni d'une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\text{Vect}(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ ainsi que la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}(\overrightarrow{j})$.

Exercice 58

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et on définit l'application $\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$. Montrer que ϕ est une application linéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 59

On considère une application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{B}' = \left(\overrightarrow{e_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 60

Montrer que $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un projecteur p dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Exercice 61

Montrer que $S = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une symétrie s dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Exercice 62

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$. Montrer que $\mathcal{B}' = \left(\overrightarrow{e_1}' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2}' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_3}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 63

On considère l'endomorphisme f de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\text{Ker} f$ est de dimension 1 et en déterminer une base $(\overrightarrow{e_1}')$, montrer que $\text{Im} f$ est de dimension 2 et en déterminer une base $(\overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}')$, montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}')$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice M' de f dans celle-ci.

Exercice 64 ($\star$)

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et en déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 65 ($\star\star$)

Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 66

Déterminer le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 67 ($\star$)

On note $M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de M_λ en fonction de λ.

Réponses

1) On pose $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et on montre que $\begin{pmatrix} x_3+y_3 \\ x_3-y_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_1-y_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ x_2-y_2 \end{pmatrix}$.

2) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + y$ et $g : P \mapsto P(0)$.

3) On pose $f : x \mapsto x$, on a $(2f) \circ (2f) \neq 2(f \circ f)$.

4) $g : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \end{pmatrix}$.

5) $\text{Ker}\, f = \mathbb{K}_0[X]$ et $\text{Im}\, f = \mathbb{K}[X]$.

6) $\text{Ker}\, f = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\text{Im}\, f = \mathbb{R}$.

7) $y(t) = \frac{1}{2} e^t + \lambda e^{-t}$.

8) $\text{Ker}\ p = G$ et $\text{Im}\ p = F$.

9) $\text{Ker}\ s = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$, $\text{Im}\ s = E$, $\text{Ker}(s - Id) = F$ et $\text{Ker}(s + Id) = G$.

10) f est une projection sur le sous-espace vectoriel des polynômes s'annulant en 0 par rapport au sous-espace vectoriel des polynômes constants.

11) f est une symétrie par rapport au sous-espace vectoriel des polynômes s'annulant en 0 parallèlement au sous-espace vectoriel des polynômes constants.

12) $(1, X^2)$.

13) 2.

14) 2.

15) $\varphi : aX^2 + bX + c \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

16) On montre que $\text{Ker}\ f = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$.

17) On montre que $\text{Ker}\ f = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$.

18) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix}$.

19) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

20) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

21) $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ -y \end{pmatrix}$.

22) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

23) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

24) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

25) $\overrightarrow{u} = \frac{3}{2} \overrightarrow{e_1}' - \frac{1}{2} \overrightarrow{e_2}'$.

26) On a $x = X + Y$ et $y = X - Y$, l'équation devient $XY = 1$.

27) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

28) 2.

29) L'endomorphisme associée est surjectif.

30) On utilise le théorème du rang.

31) On montre que $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.

32) On utilise la linéarité de l'intégrale. ϕ est surjective mais pas injective.

33) Si il existe $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = \alpha \neq 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{K}$ on a par linéarité $f\left(\dfrac{x}{\alpha}\overrightarrow{u}\right) = x$.

34) f admet pour application réciproque $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y-x \\ z-y \end{pmatrix}$.

35) f admet pour application réciproque $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X) - P'(X) \end{array}$

36) $\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ et $\mathrm{Im}\ f = \mathbb{R}^2$.

37) Pour $n \geqslant 2$, $\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Vect}(X^2)$ et $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Vect}(1, X, X^3, \ldots, X^n)$.

38) On procède par double inclusion.

39) On procède par double inclusion.

40) On remarque que si P est non nul $P - P'$ est non nul donc $\mathrm{Ker}\ f = \{0\}$ et f est injective donc bijective car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie. On remarque que si $P + P' = Q$ alors $P = Q + Q' + Q'' + \cdots + Q^{(n)}$.

41) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

42) $X^2 + X - 2$ et $X^2 + X - 5$.

43) $p \circ p = p$ donc p est un projecteur sur $\mathrm{Im}\ p$ plan vectoriel d'équation $x + y - z = 0$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\ p$ droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$s \circ s = Id$ donc s est une symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - Id)$ plan vectoriel d'équation $y - z = 0$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + Id)$ droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix}$.

44) $\begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -x-2y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

45) On a $aX^2 + bX + c = a(1 + X + X^2 - 1 - X) + bX + c = a(1 + X + X^2) + (b - a)X + (c - a)$ d'où $s(aX^2 + bX + c) = a(1 + X + X^2) - (b - a)X - (c - a) = aX^2 + (2a - b)X + (2a - c)$.

46) On a $s \circ s = 2p \circ (2p - Id) - (2p - Id) = 4(p \circ p - p) + Id$ donc $s \circ s = Id$ équivaut à $p \circ p = p$.

47) On a $(s - Id) \circ (s + Id) = 0$ donc $\mathrm{Im}(s + Id) \subset \mathrm{Ker}(s - Id)$ et si $s(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ alors $\overrightarrow{u} = (s + Id)(\frac{1}{2}\overrightarrow{u})$ d'où $\mathrm{Ker}(s - Id) \subset \mathrm{Im}(s + Id)$.

48) $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

49) $\mathrm{rg}(f) = 2$.

50) $\mathrm{rg}(-f) = \mathrm{rg}(2f) = \mathrm{rg}\ f$.

51) On remarque que $\mathrm{Im}(f + g) \subset \mathrm{Im}\ f + \mathrm{Im}\ g$ puis que $f = (f + g) + (-g)$.

52) D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}\ f) = \dim\ E - \dim(\mathrm{Ker}\ f)$ d'où si $\mathrm{Ker}\ f \cap \mathrm{Im}\ f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f) = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f) - \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) = \dim(E)$.

53) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

54) $f : P \mapsto P'$.

55) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

56) $\begin{pmatrix} -2 & & & & \\ & -1 & & (0) & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & n-2 \end{pmatrix}$.

57) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

58) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

59) $\underset{\mathcal{B}'}{\mathcal{M}at}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

60) $P^2 = P$ donc p est une projection sur $\operatorname{Im} p = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x+y+z=0 \right\}$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ y=z=0 \right\}$.

61) $S^2 = I_3$ donc s est une symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s-Id) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x+y+z=0 \right\}$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s+Id) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ y=z=0 \right\}$.

62) $\underset{\mathcal{B}',\mathcal{B}}{\mathcal{M}at}\ Id = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\underset{\mathcal{B},\mathcal{B}'}{\mathcal{M}at}\ Id = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{e_1}' + \overrightarrow{e_2}'$.

63) On a $\overrightarrow{e_1}' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_2}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_3}' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

64) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n-1 & 3^n-2^n \\ 0 & 2^n & 3^n-2^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

65) $B = P^{-1}AP$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

66) $\operatorname{rg} M = 2$.

67) Le rang de M_λ vaut 1 si $\lambda = -1$, 2 si $\lambda = 2$ et 3 sinon.