

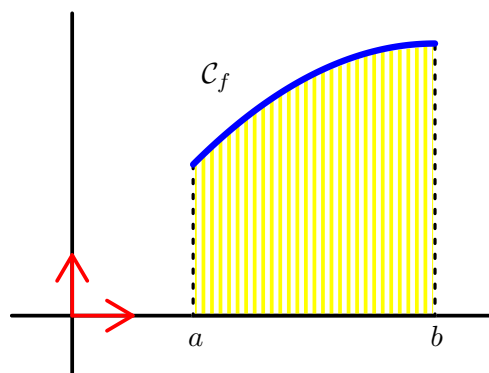
XV. Intégration

1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Définition 1.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Le plan est muni d'un repère orthogonal. L'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine délimité par la courbe représentative C_f de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est appelée **intégrale** de la fonction f entre a et b et est notée :

$$\int_a^b f(x) dx$$



Remarque 1. $\int_a^b 0 dx = 0$ et $\int_a^a f(x) dx = 0$

Remarque 2. Une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ est nulle si et seulement si son intégrale entre a et b est nulle.

Exercice 1. Calculer $\int_2^3 (2x + 1) dx$ en utilisant la définition de l'intégrale.

Définition 2. Pour une fonction f continue négative sur un intervalle $[a; b]$ on appelle intégrale de la fonction f entre a et b l'opposé de l'intégrale de la fonction $-f$ entre a et b . Pour une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$ on appelle intégrale de la fonction f entre a et b la somme des intégrales de la fonction f sur les intervalles où f est de signe constant.

Exercice 2. Calculer $\int_{-2}^3 (x - 1) dx$ en utilisant la définition de l'intégrale.

Définition 3. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. On appelle **valeur moyenne** de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$:

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

Remarque 3. La valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a; b]$ correspond à la valeur d'une fonction constante de même intégrale entre a et b .

Exercice 3. Calculer la valeur moyenne de la fonction sinus sur l'intervalle $[0; \pi]$.

Propriété 1. Croissance de l'intégrale

On considère deux fonctions f et g continues sur $[a; b]$ avec $f \leq g$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Propriété 2. Inégalité triangulaire

On considère une fonction f continue sur $[a; b]$, alors $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Exercice 4. Interpréter géométriquement l'inégalité triangulaire.

Propriété 3. Linéarité de l'intégrale

On considère $f, g \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$.

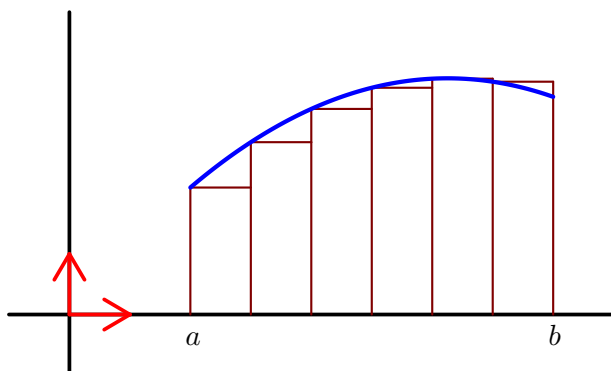
Propriété 4. Relation de Chasles

On considère une fonction f continue sur $[a; c]$ et $b \in [a; c]$, alors $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.

Remarque 4. On peut utiliser la relation de Chasles pour définir l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ entre b et a par $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$, les propriétés de l'intégrale vues précédemment demeurent valables à l'exception de celles faisant intervenir l'ordre en particulier l'inégalité triangulaire.

Propriété 5. Sommes de Riemann

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ alors $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$.



Remarque 5. La propriété demeure valable en considérant la somme $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$.

Exercice 5. Calculer $\int_0^1 x^2 dx$ en utilisant les sommes de Riemann.

Exercice 6. Montrer que $\frac{b-a}{n} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{k=n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ en approchant l'intégrale de f au moyen de trapèzes.

2 Calcul intégral

Définition 4. On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, une fonction $F \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ telle que $F' = f$ est appelée une **primitive** de la fonction f sur l'intervalle I .

Exercice 7. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'admet pas de primitive sur \mathbb{R} .

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Propriété 6. Si F_1 et F_2 sont deux primitives d'une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ alors il existe un réel k tel que $F_2 = F_1 + k$.

Théorème 1. Théorème fondamental de l'analyse

On considère une fonction $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $x_0, a, b \in I$:

- La fonction $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ est une primitive de f sur I s'annulant en x_0 .
- Si F est une primitive de f sur I alors $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a)$.

Exercice 8. Calculer l'aire du domaine plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction inverse ainsi que les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

Corollaire 1. Si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$ alors $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

Propriété 7. Intégration par parties

Si $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$ alors $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)dt$.

Exercice 9. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt$ par intégration par parties.

Exercice 10. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto xe^x$ sur \mathbb{R} par intégration par parties.

Propriété 8. Changement de variable

Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ et $\begin{matrix} a, b \in J \\ \varphi(J) \subset I \end{matrix}$ alors $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Remarque 6. En pratique, on note $x = \varphi(t)$ et $dx = \varphi'(t)dt$.

Exercice 11. Calculer $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ puis interpréter graphiquement. (on pourra utiliser le changement de variable $x = \cos t$)

Exercice 12. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2(\sin t)^3 dt$. (on pourra utiliser le changement de variable $x = \cos t$)

Corollaire 2. On considère $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a, b \in \mathbb{R}$:

- si f est **impaire** alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$ et si f est **paire** alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$.
- si f est **T-périodique** alors $\int_{a+T}^{b+T} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.

Exercice 13. Calculer $\int_0^{\pi} (\cos t)^3 dt$. (on pourra utiliser le changement de variable $t = \pi - x$)

3 Développements limités

3.1 Formules de Taylor

Propriété 9. Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral

On considère $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$ alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt$$

Corollaire 3. Inégalité de Taylor-Lagrange

On considère $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$ alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a;b]} |f^{(n+1)}|$$

Exercice 14. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle pour $a = 0$ et $b = x$. En

déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!}$.

Corollaire 4. Formule de Taylor-Young

On considère $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $a, x \in I$ alors :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Exercice 15. Appliquer la formule de Taylor-Young à la fonction cosinus en zéro. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

En fait, on peut énoncer une version plus forte de la propriété :

Propriété 10. Formule de Taylor-Young

On considère $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $a, x \in I$ alors :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Propriété 11. Développements limités usuels

$$\begin{aligned} e^x &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \cos x &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \sin x &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ \frac{1}{1-x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \\ \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ (1+x)^\alpha &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \\ \arctan x &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

3.2 Opérations sur les développements limités

Définition 5. On dit qu'une fonction f à valeurs réelles définie au voisinage de a admet un **développement limité** d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a si $f(x) \underset{a}{=} c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$ avec $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Propriété 12. Si une fonction f admet un développement limité d'ordre n en a alors celui-ci est unique.

Exercice 16. Interpréter en termes de limites les coefficients du développement limité d'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1 - x}$.

Corollaire 5. Si une fonction paire admet un développement limité d'ordre n en 0 alors les coefficients des termes de degré impair sont nuls, si une fonction impaire admet un développement limité d'ordre n en 0 alors les coefficients des termes de degré pair sont nuls.

On peut additionner et multiplier les développements limités :

Exercice 17. Calculer le développement limité d'ordre 4 en 0 des fonctions $x \mapsto \cos x + \sin x$ et $x \mapsto e^x \sin x$.

On peut déterminer le développement limité d'une composée :

Exercice 18. Calculer le développement limité d'ordre 3 en 0 des fonctions $x \mapsto e^{\sin x}$ et $x \mapsto e^{\cos x}$.

On peut déterminer le développement limité d'un inverse ou d'un quotient en utilisant le développement limité de $u \mapsto \frac{1}{1 - u}$ en 0 :

Exercice 19. Déterminer le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$, en déduire le développement limité d'ordre 5 en 0 de la fonction tangente.

Propriété 13. Développement limité d'une primitive

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et admettant une primitive F sur I telle que $f(x) \underset{a}{=} o((x - a)^n)$ avec $a \in I$ alors $F(x) \underset{a}{=} F(a) + o((x - a)^{n+1})$.

Exercice 20. Déterminer le développement limité d'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1 - x)$.

Exercice 21. Déterminer le développement limité d'ordre $2n + 1$ en 0 de la fonction arctangente.

Contre-exemple 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f(x) \underset{0}{=} o(x^2)$.
2. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} .
3. Montrer que $f'(x) \neq o(x)$.

Si f est dérivable et admet un développement limité d'ordre n en a on ne peut donc pas affirmer que f' admet un développement limité d'ordre $n - 1$ en a , en revanche si on sait que f' admet un développement limité d'ordre $n - 1$ en a alors on peut l'obtenir par dérivation du développement limité d'ordre n de f en a d'après la propriété 13.

Exercices supplémentaires**Exercice 22**

Calculer l'aire du domaine du plan situé entre les paraboles d'équation $y = x^2$ et $y = 1 - x^2$.

Exercice 23

Calculer la valeur moyenne de la fonction racine carrée sur l'intervalle $[1; 3]$.

Exercice 24 (*)

Calculer la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto (\sin x)^2$ sur l'intervalle $[0; \pi]$.

Exercice 25 ()**

On considère une fonction f continue sur l'intervalle $[a; b]$ telle que $\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$.
Montrer que f est de signe constant. (on pourra considérer la fonction $g = |f| \pm f$)

Exercice 26 ()**

On considère une fonction f continue sur l'intervalle $[a; b]$ telle que $\int_a^b f(t) dt = 0$.
Montrer que f s'annule sur $]a; b[$. (on pourra appliquer le théorème de Rolle)

Exercice 27

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{n+k}$ en étudiant les sommes de Riemann de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

Exercice 28

Montrer que $F : x \mapsto \ln |1+x|$ est une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur $] -\infty; -1[$ et sur $] -1; +\infty[$.

Exercice 29

Déterminer une primitive sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ de la fonction tangente.

Exercice 30

Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $f : x \mapsto e^x \sin x$.
(on pourra la chercher sous la forme $F : x \mapsto (\lambda \sin x + \mu \cos x)e^x$)

Exercice 31 (*)

Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $f : x \mapsto e^x (\sin x)^2$.
(on pourra linéariser)

Exercice 32

Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $f : x \mapsto \frac{1+x}{1+x^2}$.

Exercice 33 (*)

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1+x+x^2}{1+x+x^2+x^3}$, montrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que $f(x) = \frac{ax+b}{1+x^2} + \frac{c}{1+x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire une primitive de f sur $] -\infty; -1[$ et sur $] -1; +\infty[$.

Exercice 34

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\tan t)^2 dt$.

Exercice 35

Calculer $\int_0^3 |t^2 - 3t + 2| dt$.

Exercice 36

Calculer $\int_0^1 (1+t)\sqrt{t} dt$.

Exercice 37 ()**

Montrer que la fonction $\phi : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ est définie et dérivable sur $]0; 1[$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 38

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{(\cos t)^2} dt$. (on pourra effectuer une intégration par parties)

Exercice 39

Calculer $\int_0^1 t^3 e^{(t^2)} dt$. (on pourra effectuer une intégration par parties)

Exercice 40

Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction arctangente. (on pourra effectuer une intégration par parties)

Exercice 41 (*)

Calculer $\int_1^e t(\ln t)^4 dt$. (on pourra effectuer des intégrations par parties successives)

Exercice 42

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2 (\cos t)^3 dt$. (on pourra utiliser le changement de variable $x = \sin t$)

Exercice 43 (★)

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \cos t}$. (on pourra utiliser le changement de variable $x = \tan \frac{t}{2}$)

Exercice 44 (★)

Exprimer $1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ en fonction de $\tan x$ et en déduire $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt$.
(on pourra utiliser un changement de variable)

Exercice 45 (★)

On considère $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ T -périodique avec $a \in \mathbb{R}$, montrer que $\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$.
(on pourra utiliser la relation de Chasles)

Exercice 46 (★)

On considère une fonction f polynomiale de degré inférieur ou égal à 3.

Montrer que $\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$.

Exercice 47 (★★)

On considère une fonction f polynomiale de degré inférieur ou égal à 3.

Montrer que $\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \left(f\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}a + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}b\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}a + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}b\right) \right)$.

Exercice 48 (★)

Démontrer que $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ en utilisant la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral à l'ordre 2 pour $f(t) = \ln(1+t)$, $a = 0$ et $b = x$.

Exercice 49 (★)

Déterminer le développement limité à l'ordre n en $x = 0$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ en utilisant la formule de Taylor-Young.

Exercice 50

Déterminer un équivalent en 0 de la fonction $f : x \mapsto x(2 + \cos x) - 3 \sin x$.

Exercice 51

Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 6 de $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.

Exercice 52

Étudier la limite en 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{1 - \sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 53

Déterminer le développement limité à l'ordre n en $x = -1$ de $x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3$.
(on pourra utiliser le changement de variable $X = x + 1$)

Exercice 54

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en $x = 1$ de $x \mapsto \frac{1 + x^3}{1 + x + x^2}$.
(on pourra utiliser le changement de variable $X = x - 1$)

Exercice 55

Étudier la limite en 1 de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{1 - \sqrt{x}}$.
(on pourra utiliser le changement de variable $X = x - 1$)

Exercice 56 (*)

Montrer que la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ admet une asymptote oblique \mathcal{T} en $+\infty$ puis étudier les positions relatives de \mathcal{C} et \mathcal{T} au voisinage de $+\infty$.
(on pourra utiliser le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ et calculer un développement limité)

Exercice 57

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable en 0 et déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.

Exercice 58

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en $x = 0$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1 + \sin x}$.

Exercice 59

Déterminer une valeur approchée de $\arctan \frac{1}{10}$ en utilisant le développement limité de la fonction \arctan en 0 à l'ordre 4.

Exercice 60

Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de la fonction \arccos en 0.
(on pourra procéder par intégration)

Exercice 61 ()**

Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(16 - x^2)(25 - x^2)}}$.

En déduire une valeur approchée rationnelle de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(16 - t^2)(25 - t^2)}}$.

Réponses

- 1) On calcule l'aire d'un trapèze, on obtient 6.
- 2) On calcule l'aire de deux triangles, on obtient $= 2 - \frac{9}{2} = -\frac{5}{2}$.
- 3) $\frac{2}{\pi}$.
- 4) En termes d'aires, on a $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$.
- 5) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} = \frac{1}{3}$.
- 6) On pose $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ et on part de $\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{b-a}{2n} [f(x_k) + f(x_{k+1})]$.
- 7) On aurait $F(x) = C_1$ si $x < 0$ et $F(x) = C_2$ si $x > 0$, et comme F doit être dérivable donc continue, nécessairement $F = Cte$ d'où $f = 0$ ce qui est contradictoire.
- 8) $\ln 2$.
- 9) 1.
- 10) $x \mapsto (x-1)e^x$.
- 11) $\frac{\pi}{2}$ ce qui correspond à l'aire d'un demi-disque de rayon 1.
- 12) $\frac{2}{15}$.
- 13) 0.
- 14) e .
- 15) $\frac{1}{2}$.
- 16) $c_0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $c_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-c_0}{x}$, $c_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-c_0-c_1x}{x^2}$, etc, d'où $c_k = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = 1$.
- 17) $\cos x + \sin x \underset{0}{=} 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$ et $e^x \sin x \underset{0}{=} x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$.
- 18) $e^{\sin x} \underset{0}{=} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ et $e^{\cos x} \underset{0}{=} e - \frac{e}{2}x^2 + o(x^3)$.
- 19) $\frac{1}{\cos x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)$ et $\tan x \underset{0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.
- 20) $\ln(1-x) \underset{0}{=} -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \dots - \frac{1}{n}x^n + o(x^n)$.
- 21) $\arctan x \underset{0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$.
- 22) $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\frac{\sqrt{2}}{2}} 1 - x^2 dx - \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{+\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 dx = \frac{2}{3}\sqrt{2}$.
- 23) $\sqrt{3} - \frac{1}{3}$.
- 24) $\frac{1}{2}$.
- 25) Si $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ alors la fonction $g = |f| - f$ positive est d'intégrale nulle donc nulle et $f = |f| \geq 0$,
si $\int_a^b f(x) dx \leq 0$ alors la fonction $g = |f| + f$ positive est d'intégrale nulle donc nulle et $f = -|f| \leq 0$.

- 26) On applique le théorème de Rolle à la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ sur l'intervalle $[a; b]$.
- 27) $\ln 2$.
- 28) Si $x < -1$ alors $F(x) = \ln(-1 - x)$ d'où $F'(x) = \frac{-1}{-1 - x} = f(x)$.
- 29) $x \mapsto -\ln(\cos x)$.
- 30) $F(x) = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x$.
- 31) $F(x) = \frac{1}{10}(5 - \cos 2x - 2 \sin 2x)e^x$.
- 32) $F(x) = \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$.
- 33) $F(x) = \frac{1}{4} \ln(1 + x^2) + \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \ln |1 + x|$.
- 34) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.
- 35) $\frac{11}{6}$.
- 36) $\frac{16}{15}$.
- 37) On a $\phi(x) = F(x^2) - F(x)$ avec F primitive de $\frac{1}{\ln}$ d'où $\phi'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$.
- 38) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$.
- 39) $\frac{1}{2}$, en remarquant que $t^3 e^{t^2} = \frac{1}{2} t^2 \times 2te^{t^2}$.
- 40) $x \mapsto x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$.
- 41) $\frac{e^2 - 3}{4}$ en remarquant que $I_n = \int_1^e t(\ln t)^n dt$ vérifie la relation de récurrence $I_n = \frac{1}{2}(e^2 - nI_{n-1})$.
- 42) $\frac{2}{15}$.
- 43) 1.
- 44) En posant $x = \frac{\pi}{4} - t$ on obtient $I = \frac{1}{4} \pi \ln 2 - I$ d'où $I = \frac{1}{8} \pi \ln 2$.
- 45) $\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_a^0 f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_T^{a+T} f(t) dt = \int_a^0 f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$.
- 46) On prouve la formule pour $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ et $f(x) = x^3$ puis on procède par linéarité de l'intégrale.
- 47) On prouve la formule pour $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ et $f(x) = x^3$ puis on procède par linéarité de l'intégrale.
- 48) On remarque que $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \ln^{(3)}(1+t) dt \geq 0$ et que $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \ln^{(4)}(1+t) dt \leq 0$.
- 49) $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \underset{0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2k-1)}{k! 2^k} x^k + o(x^n)$.

$$50) f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^5}{60}.$$

$$51) 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 + o(x^6).$$

$$52) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -1.$$

$$53) 2(x+1) - 2(x+1)^2 + (x+1)^3 \text{ si } n \geq 3.$$

$$54) \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{4}{9}(x-1)^2 - \frac{2}{9}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

$$55) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -2.$$

$$56) \text{ On montre que } f(x) = \frac{1}{X} + 1 + \frac{1}{2}X + o(X) = x + 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$57) \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \underset{0}{=} \frac{1}{6}x + o(x) \text{ donc } f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = \frac{1}{6}.$$

$$58) \sqrt{1 + \sin x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3).$$

$$59) \arctan \frac{1}{10} \simeq \frac{299}{3000}.$$

$$60) \arccos x \underset{0}{=} \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + o(x^6).$$

$$61) f(x) \underset{0}{=} \frac{1}{20} + \frac{41}{16000}x^2 + o(x^3) \text{ d'où } F(1) - F(0) \simeq \frac{2441}{48000}.$$