XVI. Probabilités

1 Espaces probabilisés

1.1 Vocabulaire des probabilités

Définition 1. *On appelle* **expérience aléatoire** *une expérience dont le résultat est lié au hasard. Chaque résultat possible est appelé une* **issue***, l'ensemble des issues est appelé* **univers***.*

Exemple 1. *Le lancer d'une pièce est une expérience aléatoire dont l'univers est* $\Omega = \{P, F\}$*. Le lancer d'un dé cubique est une expérience aléatoire dont l'univers est* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*.*

Exercice 1. *On considère le lancer de deux dés cubiques, déterminer l'univers de cette expérience aléatoire selon qu'ils sont discernables ou indiscernables.*

Définition 2. *On appelle* **événement** *un ensemble d'issues, c'est à dire une partie de l'univers. On distingue :*
- *événement* **élémentaire** *: il ne contient qu'une seule issue.*
- *événement* **impossible** *: il ne contient aucune issue.*
- *événement* **certain** *: il contient toutes les issues.*

Exercice 2. *On considère le lancer d'un dé cubique ainsi que les événements suivants :*

A : « le 5 sort »
B : « un multiple de 2 sort »
C : « un multiple de 7 sort »
D : « un nombre inférieur à 7 sort »

Déterminer les issues des événements A, B, C et D et déterminer s'ils sont élémentaires, impossibles ou certains.

Définition 3.
- *On note* $E_1 \cap E_2$ *l'***intersection** *de deux événements, c'est l'ensemble des issues appartenant à* E_1 et *à* E_2*.*
- *On note* $E_1 \cup E_2$ *l'***union** *de deux événements, c'est l'ensemble des issues appartenant à* E_1 ou *à* E_2*.*
- *On note* $\overline{E}$ *le* **contraire** *de l'événement E, c'est l'ensemble des issues qui n'appartiennent pas à E.*
- *Deux événements* E_1 *et* E_2 *sont dits* **incompatibles** *si* $E_1 \cap E_2 = \emptyset$*, c'est à dire qu'ils ne peuvent se réaliser en même temps.*

Remarque 1.

$$\overline{\Omega} = \emptyset \qquad \overline{\emptyset} = \Omega \qquad \overline{\overline{E}} = E \qquad E \text{ et } \overline{E} \text{ sont incompatibles}$$

Exercice 3. *On considère les événements A, B, C et D de l'exercice 2, déterminer* $A \cup B$*,* $A \cap D$*,* $\overline{B}$ *et montrer que A et B sont incompatibles.*

Définition 4. *On appelle* **système complet d'événements** *d'une expérience aléatoire un ensemble d'événements deux à deux incompatibles dont la réunion est l'univers de l'expérience aléatoire.*

Exemple 2. $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$ *est un système complet d'événements du lancer d'un dé cubique.*

Exercice 4. *Déterminer un système complet d'événements du lancer d'un dé cubique composé de trois événements non impossibles ou élémentaires.*

1.2 Notion de probabilité

Définition 5. *On appelle* **probabilité** *sur un univers* Ω*, une application* $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ *telle que* $P(\Omega) = 1$ *et* $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ *pour tous* $E_1, E_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$ *avec* $E_1 \cap E_2 = \emptyset$*.*

Le couple (Ω, P) *est appelé* **espace probabilisé***.*

Remarque 2. *On a* $P(\emptyset) = 0$*.*

Propriété 1. *On considère un espace probabilisé* (Ω, P)*, alors :*

- *Pour tout* $E \in \mathcal{P}(\Omega)$*, on a* $P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E)$*.*
- *Pour tous* $E_1, E_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$ *avec* $E_1 \subset E_2$*, on a* $P(E_1) \leqslant P(E_2)$*.*
- *Pour tous* $E_1, E_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$*, on a* $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$*.*

Propriété 2. *On considère un univers fini* $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *et des réels* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *positifs de somme égale à* 1*, alors il existe une unique probabilité* P *sur* Ω *telle que* $P(\{e_k\}) = p_k$ *pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$*.*

Si de plus $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$*, la probabilité est dite* **uniforme***.*

Exemple 3. *On considère le lancer d'un dé cubique équilibré :*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

On considère le lancer d'un dé cubique truqué :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad P(\{6\}) = \frac{1}{3} \quad P(\{1\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = \frac{1}{6} \quad P(\{2\}) = P(\{3\}) = \frac{1}{12}$$

Propriété 3. *Étant donné un univers fini muni d'une probabilité, la probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités associées aux issues composant celui-ci.*

Exercice 5. *Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair dans le cas du dé truqué de l'exemple 3.*

Propriété 4. *On considère un univers* Ω *contenant* n *issues muni d'une probabilité uniforme* P*, alors si* E *est un événement contenant* p *issues on a :*

$$P(E) = \frac{p}{n} = \frac{\textit{nombre d'issues favorables}}{\textit{nombre total d'issues}}$$

Exercice 6. *Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair dans le cas du dé équilibré de l'exemple 3.*

1.3 Indépendance et conditionnement

Exercice 7. *On considère une urne contenant 7 boules rouges et 13 boules vertes indiscernables et on tire successivement sans remise deux boules de l'urne.*

1. *Déterminer au moyen d'un arbre l'univers de cette expérience aléatoire.*
2. *Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :*
   - *« on obtient une boule rouge au premier tirage »*
   - *« on obtient une boule rouge au premier tirage et une boule rouge au second tirage »*
3. *Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge au deuxième tirage sachant que l'on a obtenu une boule rouge au premier tirage ?*

Définition 6. *On considère un espace probabilisé (Ω, P) et deux événements A et B avec $P(B) \neq 0$. On appelle* probabilité de A sachant B *:*

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exercice 8. *Calculer la probabilité d'obtenir un numéro pair sachant que l'on n'obtient pas un six dans le cas du dé truqué de l'exemple 3.*

Propriété 5. *On considère un espace probabilisé (Ω, P) et un événement B tel que $P(B) \neq 0$, alors l'application $P_B : A \mapsto P_B(A)$ est une probabilité sur Ω.*

Propriété 6. **Formule des probabilités composées**
On considère un espace probabilisé (Ω, P) et deux événements A et B avec $P(B) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

Définition 7. *On considère un espace probabilisé (Ω, P), deux événements A et B sont dits* **indépendants** *si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.*

Remarque 3. *Deux événements A et B avec $P(B) \neq 0$ sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.*

Exercice 9. *Les événements « obtenir un numéro pair » et « obtenir un multiple de trois » sont-ils des événements indépendants dans le cas du dé équilibré et du dé truqué de l'exemple 3 ?*

Définition 8. *On considère un espace probabilisé (Ω, P), des événements $E_1, E_2 \dots E_n$ sont dits*

— **deux à deux indépendants** *si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ distincts, $P(E_i \cap E_j) = P(E_i) \times P(E_j)$.*

— **mutuellements indépendants** *si pour tout $p \in [\![2, n]\!]$ et pour tous $i_1, i_2, \dots, i_p \in [\![1, n]\!]$ distincts, $P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_p}) = P(E_{i_1}) \times P(E_{i_2}) \times \dots \times P(E_{i_p})$.*

Exercice 10. *On lance deux fois successivement un dé cubique équilibré et on considère les événements suivants :*

E_1 *: « le résultat du premier lancer est pair »*
E_2 *: « le résultat du second lancer est pair »*
E_3 *: « la somme des résultats du premier et du second lancer est impaire »*

Les événements E_1, E_2 et E_3 sont-ils deux à deux indépendants et/ou mutuellement indépendants ?

Propriété 7. **Formule des probabilités totales**
On considère un espace probabilisé (Ω, P) muni d'un système complet d'événements $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ de probabilités non nulles, alors pour tout événement E on a $P(E) = P(E_1) \times P_{E_1}(E) + P(E_2) \times P_{E_2}(E) + \dots + P(E_n) \times P_{E_n}(E)$.

Exercice 11. *Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au deuxième tirage dans l'expérience de l'exercice 7.*

Propriété 8. **Formules de Bayes**
On considère un espace probabilisé (Ω, P) muni d'un système complet d'événements $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ de probabilités non nulles et trois événements A, B, E de probabilités non nulles, alors $P_B(A) = \dfrac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$ *et* $P_E(E_i) = \dfrac{P_{E_i}(E) \times P(E_i)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} P(E_k) \times P_{E_k}(E)}$, $i \in [\![1, n]\!]$

Exercice 12. *Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge au premier tirage sachant que l'on a obtenu une boule rouge au second tirage dans l'expérience de l'exercice 7.*

2 Variables aléatoires

2.1 Notion de variables aléatoire

Définition 9. *Étant donné un univers Ω, on appelle* **variable aléatoire** *X sur Ω toute fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.*

Exemple 4. *La somme des résultats obtenus lors de deux lancers successifs d'un dé cubique est une variable aléatoire.*

Remarque 4. *Si φ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $Y = \varphi \circ X$ est une variable aléatoire que l'on notera $\varphi(X)$.*

Définition 10. *On considère une variable aléatoire X sur un univers Ω, $x \in \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. On note $X \in A$ l'événement $X^{-1}(A)$, $X = x$ l'événement $X^{-1}(\{x\})$ et $X \leqslant x$ l'événement $X^{-1}(]-\infty; x])$.*

Exercice 13. *On note X la somme des résultats obtenus lors de deux lancers successifs d'un dé cubique équilibré. Déterminer $P(X = 6)$ et $P(7 \leqslant X \leqslant 10)$.*

Définition 11. *On appelle* **loi de probabilité** *d'une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé (Ω, P), l'application $P_X : \begin{array}{rcl} X(\Omega) & \to & [0;1] \\ x & \mapsto & P(X = x) \end{array}$.*

Exercice 14. *Déterminer la loi de probabilité de la somme des résultats obtenus lors de deux lancers successifs d'un dé cubique équilibré.*

Propriété 9. *P_X est une probabilité sur $X(\Omega)$.*

Définition 12. *On appelle* **fonction de répartition** *d'une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé (Ω, P), l'application $F_X : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [0;1] \\ x & \mapsto & P(X \leqslant x) \end{array}$.*

Exercice 15. *Représenter graphiquement la fonction de répartition de la somme des résultats obtenus lors de deux lancers successifs d'un dé cubique équilibré.*

Propriété 10. *On considère une variable aléatoire X sur un espace probabilisé (Ω, P) alors pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ avec $x_1 < x_2$, $P(x_1 < X \leqslant x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$.*

2.2 Espérance et variance d'une variable aléatoire

Définition 13. *On appelle* **espérance** *d'une variable aléatoire X sur un espace probabilisé (Ω, P) fini, $\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$. Une variable aléatoire X telle que $\mathrm{E}(X) = 0$ est dite* **centrée**.

Exercice 16. *Calculer l'espérance de la somme des résultats obtenus lors de deux lancers successifs d'un dé cubique équilibré.*

Propriété 11. *On considère une variable aléatoire X sur un espace probabilisé (Ω, P) fini, alors $\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.*

Remarque 5. *L'espérance d'une variable aléatoire correspond à la moyenne pondérée de ses valeurs par leurs probabilités d'apparition.*

Propriété 12. **Linéarité de l'espérance**
On considère deux variables aléatoires X et Y sur un espace probabilisé (Ω, P) fini et deux réels λ et μ, alors $\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathrm{E}(X) + \mu \mathrm{E}(Y)$.

Exercice 17. *Utiliser la linéarité de l'espérance pour simplifier le calcul de l'exercice 16.*

Propriété 13. **Théorème de transfert**
On considère une variable aléatoire X sur un espace probabilisé (Ω, P) fini et une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $\mathrm{E}(\varphi(X)) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) P(X = x)$.

Exercice 18. *Calculer l'espérance du carré de la somme des numéros obtenus lors du lancer de deux dés cubiques équilibrés.*

Définition 14. *On appelle* **variance** *d'une variable aléatoire X sur un espace probabilisé (Ω, P) fini,* $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right)$. *Une variable aléatoire X telle que $\mathrm{V}(X) = 1$ est dite* **réduite**.

On appelle **écart type** *d'une variable aléatoire X sur un espace probabilisé (Ω, P) fini,* $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$.

Remarque 6. *La variance d'une variable aléatoire correspond à la moyenne pondérée du carré des écarts à l'espérance de ses valeurs par leurs probabilités d'apparition.*

Remarque 7. $\mathrm{V}(X) = 0 \iff X = \mathrm{E}(X)$.

Exercice 19. *Calculer la variance et l'écart type de la somme des résultats obtenus lors de deux lancers successifs d'un dé cubique équilibré.*

Propriété 14. *On considère une variable aléatoire X sur un espace probabilisé (Ω, P) fini et deux réels a et b, alors* $\mathrm{V}(aX + b) = a^2 \mathrm{V}(X)$.

Propriété 15. **Formule de Koenig-Huygens**
On considère une variable aléatoire X sur un espace probabilisé (Ω, P) fini,
alors $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.

Exercice 20. *Vérifier la formule de Koenig-Huygens pour la variable aléatoire de l'exercice 19.*

Propriété 16. **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**
On considère une variable aléatoire X sur un espace probabilisé (Ω, P) fini et $a \in]0; +\infty[$,
alors $P\left(|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{\mathrm{V}(X)}{a^2}$.

2.3 Lois de probabilités usuelles

Définition 15. *On dit qu'une variable aléatoire X sur un univers probabilisé (Ω, P) suit une* **loi certaine** *si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = a) = 1$.*

Remarque 8. *Si X suit une loi certaine, $\mathrm{E}(X) = a$ et $\mathrm{V}(X) = 0$.*

Définition 16. *On dit qu'une variable aléatoire X sur un univers probabilisé (Ω, P) suit une* **loi uniforme** *si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $P(X = a_k) = \dfrac{1}{n}$ pour tout $k \in [\![1; n]\!]$.*

Exemple 5. *Le résultat du lancer d'un dé cubique équilibré suit une loi uniforme.*

Lemme 1. *On considère $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$ et $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.*

Propriété 17. *On considère une variable aléatoire X sur un univers probabilisé (Ω, P) telle que $P(X = k) = \dfrac{1}{n}$ pour tout $k \in [\![1; n]\!]$ alors $\mathrm{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\mathrm{V}(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.*

Définition 17. *On dit qu'une variable aléatoire X sur un univers probabilisé (Ω, P) suit une* **loi de Bernoulli de paramètre p** *notée $\mathcal{B}(p)$ si il existe $p \in [0; 1]$ tel que $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.*

Remarque 9. *On note parfois $q = 1 - p$.*

Exemple 6. *Le nombre de Pile obtenus lors du lancer d'une pièce équilibrée suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.*

Propriété 18. *On considère une variable aléatoire X sur un univers probabilisé suivant une loi de Bernoulli de paramètre p alors $\mathrm{E}(X) = p$ et $\mathrm{V}(X) = p(1 - p)$.*

Exercice 21. *On lance n fois une pièce équilibrée. Calculer la probabilité d'obtenir k fois pile, $k \in [\![0; n]\!]$.*

Définition 18. *On dit qu'une variable aléatoire X sur un univers probabilisé (Ω, P) suit une* **loi binomiale de paramètres n et p** *notée $\mathcal{B}(n, p)$ si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$ tels que $P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1 - p)^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0; n]\!]$.*

Remarque 10. *Si une variable aléatoire X suit une loi binomiale alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} P(X = k) = 1$.*

Exemple 7. *Le nombre de Pile obtenus lors de n lancers successifs d'une pièce équilibrée suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$.*

Exercice 22. *On lance n fois une pièce équilibrée. Calculer le nombre moyen de piles obtenus.*

Propriété 19. *On considère une variable aléatoire X sur un univers probabilisé suivant une loi binomiale de paramètres n et p alors $\mathrm{E}(X) = np$ et $\mathrm{V}(X) = np(1 - p)$.*

Exercices supplémentaires

Exercice 23

On lance successivement un dé cubique jusqu'à ce que le total des nombres obtenus soit supérieur ou égal à 3.

Déterminer l'univers de cette expérience aléatoire.

Exercice 24

On considère une urne contenant N boules blanches et N boules noires indiscernables et on tire successivement sans remise toutes les boules de l'urne.

Déterminer le nombre d'issues de cette expérience aléatoire.

Exercice 25

Déterminer le nombre d'anagrammes du mot probabilité.

Exercice 26

On considère un dé cubique déséquilibré tel que la probabilité d'apparition d'une face soit proportionnelle au nombre qu'elle porte.

Déterminer la probabilité d'apparition de chacune des faces.

Exercice 27

On lance trois fois de suite une pièce équilibrée. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois Pile.

Exercice 28 ($\star$)

On considère deux dés cubiques équilibrés, est-il avantageux de parier sur l'apparition d'au moins un six lorsque l'on lance quatre fois un dé et sur l'apparition d'au moins un double six lorsque l'on lance vingt-quatre fois deux dés ?

Exercice 29 ($\star$)

On considère trois verres opaques retournés dont l'un seulement cache une pièce d'or. Après que le joueur a choisi un des verres, le maître du jeu retourne parmi les deux verres non désignés un verre ne contenant pas la pièce d'or et propose au joueur de modifier son choix. Le joueur doit-il confirmer ou infirmer sa réponse ?

Exercice 30

On lance dix fois de suite une pièce équilibrée. Calculer la probabilité d'obtenir cinq fois Pile.

Exercice 31

On tire cinq cartes au hasard dans un jeu de 52 cartes.

Quelle est la probabilité que cette main soit un Full(trois cartes de même rang et deux cartes de même rang) ?

Exercice 32 ($\star$)

Déterminer dans un groupe de 30 personnes, la probabilité que deux au moins aient la même date d'anniversaire. (on ne prend pas en compte l'existence du 29 février)

En calculer une valeur approchée. (on pourra approcher un produit de n nombres par la n-ième puissance de leur moyenne arithmétique)

Exercice 33

On considère deux urnes, la première contient deux boules noires et une boule blanche et la seconde une boule noire et deux boules blanches. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne.

Calculer la probabilité que la boule provienne de la première urne sachant qu'elle est blanche.

Exercice 34

On considère la statistique suivante* : Sur 100 000 femmes battues (par leur conjoint), 45 sont tuées dont 40 par leur conjoint.

Déterminer la probabilité qu'une femme battue soit tuée par son conjoint ainsi que la probabilité qu'une femme battue ait été tuée par son conjoint sachant qu'elle a été tuée.

*Penser le risque : apprendre à vivre dans l'incertitude par Gerd Gigerenzer

Exercice 35

On considère une maladie qui touche 2% de la population. Le test de dépistage de cette maladie est positif avec une probabilité de 95% si l'individu est malade et est positif avec une probabilité de 3% si l'individu est sain.

Déterminer la probabilité pour un individu d'être malade si son test est positif et en donner une valeur approchée au centième.

Exercice 36

On lance successivement un dé cubique jusqu'à ce que le total des nombres obtenus soit supérieur ou égal à 3.

Déterminer l'espérance du nombre de lancers réalisés.

Exercice 37

On considère un trousseau de 5 clefs dont deux permettent d'ouvrir une porte donnée et on teste les clefs au hasard successivement jusqu'à l'ouverture de la porte.

Déterminer l'espérance et la variance du nombre d'essais nécessaires.

Exercice 38

On considère une urne contenant 5 boules blanches et 5 boules noires indiscernables et on tire successivement sans remise toutes les boules de l'urne.

Déterminer l'espérance du rang d'obtention de la première boule noire.

Exercice 39 ($\star$)

On considère une variable aléatoire X sur un espace probabilisé fini à valeurs dans $[0;1]$, montrer que $E(X^2) \leqslant E(X)$ et en déduire que $V(X) \leqslant \frac{1}{4}$.

Exercice 40

On considère un devoir de Mathématiques de moyenne 8 et d'écart-type 2.

Déterminer le plus petit intervalle centré autour de la moyenne tel que la probabilité d'appartenance à celui-ci de la note d'une copie tirée au hasard soit supérieure à 75%.

Exercice 41

On tire une boule dans une urne contenant des boules indiscernables numérotées de 7 à 77 et on note X le numéro de la boule obtenue.

Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 42 ($\star$)

On tire une boule dans une urne contenant des boules indiscernables numérotées par des numéros pairs de 10 à 30 et on note X le numéro de la boule obtenue.

Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 43 ($\star$)

On considère une urne contenant une boule blanche et une boule noire indiscernables et on effectue des tirages successifs en remettant après chaque tirage la boule tirée et en ajoutant une boule supplémentaire de la même couleur.

Déterminer la loi de probabilité du nombre de boules blanches présentes dans l'urne après N tirages.

Exercice 44

On effectue N tirages successifs avec remise dans une urne contenant deux boules blanches et trois boules noires indiscernables. On gagne g points par boule blanche tirée et on perd deux points par boule noire tirée.

Quelle valeur de g faut-il choisir pour que l'espérance du gain soit nulle ? (jeu équitable)

Exercice 45

On tire une boule dans une urne contenant k boules portant le numéro k pour tout $k \in [\![1;9]\!]$.

Déterminer l'espérance et la variance du numéro de la boule tirée.

Exercice 46

Une classe préparatoire doit accueillir 30 élèves, des statistiques montrent que 5% des élèves inscrits ne se présentent pas.

Quelle est la probabilité qu'à la rentrée scolaire la classe soit constituée d'au moins 27 élèves ? En donner une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.

Exercice 47 ($\star$)

On lance successivement une pièce déséquilibrée et on note p la probabilité d'apparition de Pile et X la proportion de Pile obtenus après N lancers.

Calculer l'espérance et la variance de X puis déterminer N pour que X soit une valeur approchée de p au dixième avec une probabilité de 90%.

Réponses

1) $\Omega_1 = \{(1;1),(1;2),\dots,(1;6),(2;1),(2;2),\dots,(2;6),(3;1),\dots,(6;6)\} = \{(i;j)\backslash i,j \in [\![1;6]\!]\}$,
$\Omega_2 = \{\{1;1\},\{1;2\},\dots,\{1;6\},\{2;2\},\{2;3\},\dots,\{2;6\},\{3;3\},\dots,\{6;6\}\} = \{\{i;j\}\backslash i \leqslant j; i,j \in [\![1;6]\!]\}$.

2) $A = \{5\}$: événement élémentaire,
$B = \{2;4;6\}$,
$C = \{\ \}$: événement impossible,
$D = \{1;2;3;4;5;6\}$: événement certain.

3) $A \cup B = \{2;4;5;6\}$, $A \cap D = \{5\}$, $\overline{B} = \{1;3;5\}$ et $A \cap B = \varnothing$.

4) $\{\{1;2\},\{3;4\},\{5;6\}\}$.

5) $P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{7}{12}$.

6) $\frac{1}{2}$ car le nombre de cas favorables est 3 et le nombre total d'issues est 6.

7) $\Omega = \{(R_1;R_2),(R_1;V_2),(V_1;R_2),(V_1;V_2)\}$, $P(R_1) = \frac{7}{20}$, $P(R_1 \cap R_2) = \frac{42}{42+91+91+156} = \frac{21}{190}$ et $P_{R_1}(R_2) = \frac{6}{19}$.

8) $\dfrac{\frac{1}{12}+\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{8}$.

9) oui pour le dé équilibré, non pour le dé truqué.

10) $P(E_1) = \frac{1}{2}$, $P(E_2) = \frac{1}{2}$, $P(E_3) = \frac{1}{2}$, $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{4}$, $P(E_1 \cap E_3) = \frac{1}{4}$, $P(E_2 \cap E_3) = \frac{1}{4}$ et $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0$ donc les événements sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

11) $P(R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + P(V_1) \times P_{V_1}(R_2) = \frac{7}{20} \times \frac{6}{19} + \frac{13}{20} \times \frac{7}{19} = \frac{7}{20}$.

12) $P_{R_2}(R_1) = \dfrac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \dfrac{\frac{7}{20} \times \frac{6}{19}}{\frac{7}{20}} = \dfrac{6}{19}$.

13) $P(X = 6) = \frac{5}{36}$ et $P(7 \leqslant X \leqslant 10) = \frac{1}{2}$.

14)

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

15) On montre que $P(X \leqslant 1) = \frac{1}{36}$, $P(X \leqslant 2) = \frac{3}{36}$, $P(X \leqslant 3) = \frac{6}{36}$, …

16) $\frac{1}{36} \times 2 + \frac{2}{36} \times 3 + \dots \frac{6}{36} \times 7 + \frac{5}{36} \times 8 + \cdots + \frac{1}{6} \times 12 = 7$.

17) On ajoute les espérances de la somme du résultat du premier dé et de la somme du résultat du deuxième dé.

18) $\frac{1}{36} \times 2^2 + \frac{2}{36} \times 3^2 + \cdots + \frac{6}{36} \times 7^2 + \frac{5}{36} \times 8^2 + \cdots + \frac{1}{6} \times 12^2 = \frac{329}{6}$.

19) $V(X) = \frac{1}{36} \times (2-7)^2 + \frac{2}{36} \times (3-7)^2 + \cdots + \frac{6}{36} \times (7-7)^2 + \frac{5}{36} \times (8-7)^2 + \cdots + \frac{1}{6} \times (12-7)^2 = \frac{35}{6}$.

20) $V(X) = \frac{329}{6} - (7)^2 = \frac{35}{6}$.

21) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$.

22) $\dfrac{n}{2}$.

23) $\Omega = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,1,4),(1,1,5),(1,1,6),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3),(4),(5),(6)\}$.

24) $\binom{2N}{N}$.

25) $\dfrac{11!}{2!\,2!} = 9\ 979\ 200$.

26) $P(\{k\}) = \dfrac{k}{21}$.

27) $\dfrac{1}{2}$.

28) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 > \frac{1}{2}$ et $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} < \frac{1}{2}$.

29) Dans seulement un cas sur trois équiprobables, le joueur perd en modifiant son choix.

30) $\dfrac{63}{256}$.

31) $\dfrac{13\times\binom{4}{3}\times 12\times\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \dfrac{6}{4165}$.

32) $1-\dfrac{\frac{365!}{335!}}{365^{30}} \simeq 1-\left(\dfrac{336+365}{2\times 365}\right)^{30} \simeq \dfrac{7}{10}$.

33) $\dfrac{1}{3}$.

34) $\dfrac{1}{2500}$ et $\dfrac{8}{9}$.

35) $P_+(M) = \dfrac{P_M(+)\times P(M)}{P_M(+)\times P(M) + P_{\overline{M}}(+)\times P(\overline{M})} = \dfrac{95\%\times 2\%}{95\%\times 2\% + 3\%\times 98\%} \simeq 39\%$.

36) $1\times\dfrac{2}{3}+2\times\dfrac{11}{36}+3\times\dfrac{1}{36}=\dfrac{49}{36}$.

37) $1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+3\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+4\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=2$ et 1.

38) $\dfrac{1\times\binom{9}{4}+2\times\binom{8}{4}+3\times\binom{7}{4}+4\times\binom{6}{4}+5\times\binom{5}{4}+6\times\binom{4}{4}}{\binom{10}{5}} = \dfrac{11}{6}$.

39) $V(X)=E(X^2)-E(X)^2 \leqslant E(X)-E(X)^2 \leqslant \frac{1}{4}$ car $E(X)\in[0;1]$.

40) $[4;12]$ en remarquant que $P(|X-8|\leqslant a)\leqslant \frac{4}{a^2}\leqslant 25\%$.

41) On pose $Y=X-6$, on en déduit que $E(X)=E(Y)+6=42$ et $V(X)=V(Y)=420$.

42) $E(X)=20$ et $V(X)=40$.

43) $P(X=k)=\dfrac{1}{N+1}$ pour tout $k\in[\![1;N+1]\!]$ en procédant par récurrence sur N.

44) $(g+2)\times\dfrac{2}{5}N-2N=0 \Leftrightarrow g=3$.

45) $\dfrac{19}{3}$ et $\dfrac{44}{9}$.

46) Le nombre d'élèves présents X suit une loi binomiale, on calcule $P(X=27)+P(X=28)+P(X=29)+P(X=30)\simeq 94\%$.

47) $E(X)=\frac{1}{N}\times Np=p$, $V(X)=\frac{1}{N^2}Np(1-p)=\frac{p(1-p)}{N}$ et $N=250$ en remarquant que $P(|X-p|\geqslant\frac{1}{10})\leqslant\frac{100p(1-p)}{N}\leqslant\frac{25}{N}$.