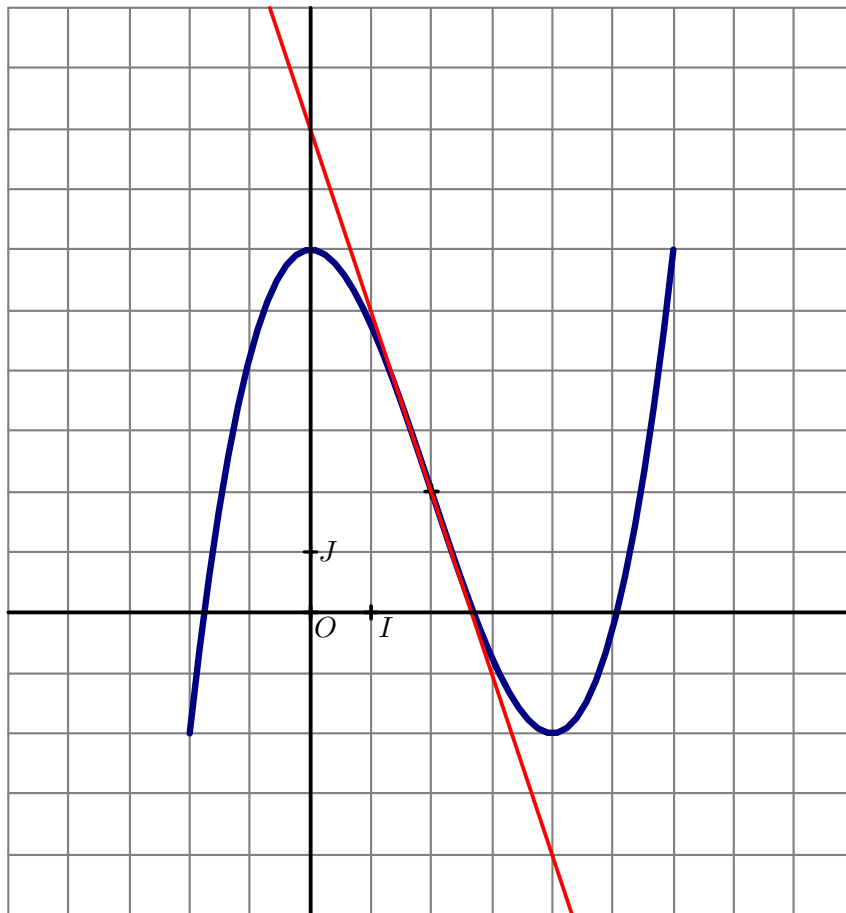


Devoir de mathématiques n°5

Exercice 1

On considère la représentation graphique d'une fonction f sur l'intervalle $[-2; 6]$ dans un repère orthogonal (O, I, J) :



1. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
2. En déduire le tableau de signes de la dérivée f' de la fonction f .
3. Déterminer graphiquement l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 2.
4. En déduire la valeur de $f'(2)$.

Exercice 2

Sur une autoroute, le prix du péage est de 0,07€ par kilomètre. La société qui exploite l'autoroute propose aux usagers un abonnement aux conditions suivantes :

- achat d'une carte annuelle d'un coût de 56 € ;
- 30% de réduction sur le prix du kilomètre aux titulaires de la carte

Partie A - Choix d'un automobiliste

1. Un automobiliste parcourt 10 000 km sur l'autoroute dans l'année.
 - (a) Combien paie-t-il sans abonnement ?
 - (b) Combien paie-t-il avec abonnement ?
 - (c) Quel est le pourcentage d'économie réalisé s'il prend un abonnement ?
2. Les fonctions f et g sont définies de la façon suivante :
 - $f(x)$ est le coût du péage pour un automobiliste non abonné parcourant x kilomètres dans l'année.
 - $g(x)$ est le coût du péage pour un automobiliste abonné parcourant x kilomètres dans l'année.
 - (a) Exprimer $f(x)$ en fonction de x .
 - (b) Montrer que $g(x) = 0,049x + 56$.
 - (c) Représenter graphiquement les fonctions f et g dans un même repère sur l'intervalle $[0; 10000]$.
Sur l'axe des abscisses, un centimètre représente 1000 km et sur l'axe des ordonnées, un centimètre représente 100€.
 - (d) Résoudre par le calcul l'inéquation $g(x) \leq f(x)$.
En déduire la distance parcourue, arrondie au km, à partir de laquelle l'automobiliste a intérêt à s'abonner.

Partie B - Étude du pourcentage d'économie

Un automobiliste parcourt plus de 3000 km par an.

1. Le pourcentage d'économie qu'il réalise pour x kilomètres parcourus au cours d'une année d'abonnement est donné par :

$$p(x) = \frac{f(x) - g(x)}{f(x)}$$

Montrer que $p(x) = 0,3 - \frac{800}{x}$.

- (a) On note p' la fonction dérivée de la fonction p . Calculer $p'(x)$.
- (b) En déduire le sens de variation de la fonction p sur l'intervalle $[3000; 20000]$.
2. Le plan est rapporté à un repère orthogonal. Sur l'axe des abscisses, un centimètre représente 1000 km et sur l'axe des ordonnées, un centimètre représente 0,02, c'est à dire 2%. Tracer la courbe représentative de la fonction p sur l'intervalle $[3000; 20000]$.
3. (a) À partir de combien de kilomètres parcourus en une année le pourcentage d'économie dépasse-t-il 25% ?
- (b) Ce pourcentage peut-il dépasser 30% ? Justifier votre réponse.

Exercice 3

Une entreprise qui fabrique des vases fait une étude sur une production comprise entre 0 et 50 vases. Le coût de production, en euros, de x objets fabriqués est donné par : $C(x) = x^2 + 30x + 400$ pour $x \in [0; 50]$.

Partie A

1. Calculer $C(0)$. En déduire les frais fixes de l'entreprise.
2. Quel est le coût de production de 20 vases ?
3. Quel est le coût de production par vase, lorsque l'entreprise fabrique 20 vases ?
Ce résultat est appelé coût unitaire moyen pour 20 vases fabriqués.
4. Soit $f(x)$ le coût unitaire moyen pour x vases fabriqués.
Exprimer $f(x)$ en fonction de x pour $x \in [0; 50]$.

Partie B

On donne la fonction f définie par $f(x) = x + 30 + \frac{400}{x}$, pour $x \in [0; 50]$.
 $f(x)$ est exprimé en euros.

1. (a) Calculer $f'(x)$.
(b) Montrer que $f'(x) = \frac{(x - 20)(x + 20)}{x^2}$.
2. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 50]$ et en déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $[0; 50]$.
(b) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0; 50]$.
3. Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	5	10	15	20	30	40	50
$f(x)$			71,7		73,3		

4. Tracer la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités 1 cm pour 5 vases en abscisses et 1 cm pour 5 euros en ordonnées, en commençant la graduation à 60.

Partie C

Dans cette partie, le nombre de vases fabriqués est compris entre 5 et 50.

1. Combien l'usine doit-elle fabriquer de vases pour que le coût unitaire moyen soit minimal ? Indiquer ce coût.
2. Chaque vase est vendu 80 euros.
 - (a) Construire sur le graphique précédent la droite Δ d'équation $y = 80$ et déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection de la courbe \mathcal{C} et de la droite Δ .
 - (b) En déduire l'intervalle de production pour lequel l'entreprise réalise un bénéfice.
3. (a) Exprimer en fonction de x le prix de vente $V(x)$ réalisé lorsque l'entreprise vend x vases.
(b) En utilisant la fonction coût $C(x)$ étudiée dans la partie A, donner l'expression du bénéfice $B(x)$ en fonction de x .
(c) Calculer $B(10)$ et $B(40)$, puis $B(30)$. Ces résultats coïncident-ils avec ceux du 2b ?