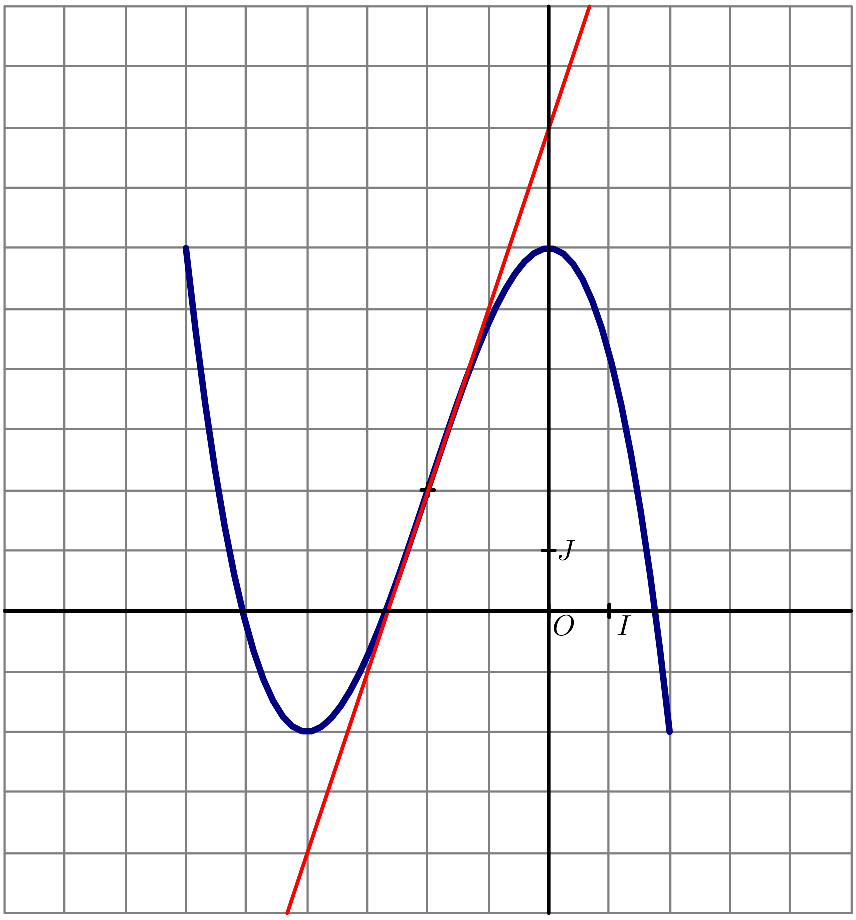
Devoir de mathématiques n°5

Exercice 1

On considère la représentation graphique d'une fonction f sur l'intervalle $[-6;2]$ dans un repère orthonormal (O, I, J) :



1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. En déduire le tableau de signes de la dérivée f' de la fonction f.
3. Déterminer graphiquement l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse -2.
4. En déduire la valeur de $f'(-2)$.

Exercice 2

Sur une autoroute, le prix du péage est de 0,06€ par kilomètre. La société qui exploite l'autoroute propose aux usagers un abonnement aux conditions suivantes :

– achat d'une carte annuelle d'un coût de 48 € ;
– 30% de réduction sur le prix du kilomètre aux titulaires de la carte

Partie A - Choix d'un automobiliste

1. Un automobiliste parcourt 10 000 km sur l'autoroute dans l'année.
   (a) Combien paie-t-il sans abonnement ?
   (b) Combien paie-t-il avec abonnement ?
   (c) Quel est le pourcentage d'économie réalisé s'il prend un abonnement ?
2. Les fonctions f et g sont définies de la façon suivante :
   – $f(x)$ est le coût du péage pour un automobiliste non abonné parcourant x kilomètres dans l'année.
   – $g(x)$ est le coût du péage pour un automobiliste abonné parcourant x kilomètres dans l'année.

   (a) Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
   (b) Montrer que $g(x) = 0,042x + 48$.
   (c) Représenter graphiquement les fonctions f et g dans un même repère sur l'intervalle $[0; 10000]$.
   Sur l'axe des abscisses, un centimètre représente 1000 km et sur l'axe des ordonnées, un centimètre représente 100€.
   (d) Résoudre par le calcul l'inéquation $g(x) \leqslant f(x)$.
   En déduire la distance parcourue, arrondie au km, à partir de laquelle l'automobiliste a intérêt à s'abonner.

Partie B - Étude du pourcentage d'économie

Un automobiliste parcourt plus de 3000 km par an.

1. Le pourcentage d'économie qu'il réalise pour x kilomètres parcourus au cours d'une année d'abonnement est donné par :
$$p(x) = \frac{f(x) - g(x)}{f(x)}$$
   Montrer que $p(x) = 0,3 - \dfrac{700}{x}$.
   (a) On note p' la fonction dérivée de la fonction p. Calculer $p'(x)$.
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction p sur l'intervalle $[3000; 20000]$.
2. Le plan est rapporté à un repère orthogonal. Sur l'axe des abscisses, un centimètre représente 1000 km et sur l'axe des ordonnées, un centimètre représente 0,02, c'est à dire 2%. Tracer la courbe représentative de la fonction p sur l'intervalle $[3000; 20000]$.
3. (a) À partir de combien de kilomètres parcourus en une année le pourcentage d'économie dépasse-t-il 25% ?
   (b) Ce pourcentage peut-il dépasser 30% ? Justifier votre réponse.

Exercice 3

Une entreprise qui fabrique des vases fait une étude sur une production comprise entre 0 et 50 vases. Le coût de production, en euros, de x objets fabriqués est donné par : $C(x) = x^2 + 40x + 400$ pour $x \in [0;50]$.

Partie A

1. Calculer $C(0)$. En déduire les frais fixes de l'entreprise.
2. Quel est le coût de production de 20 vases ?
3. Quel est le coût de production par vase, lorsque l'entreprise fabrique 20 vases ?
   Ce résultat est appelé coût unitaire moyen pour 20 vases fabriqués.
4. Soit $f(x)$ le coût unitaire moyen pour x vases fabriqués.
   Exprimer $f(x)$ en fonction de x pour $x \in [0;50]$.

Partie B

On donne la fonction f définie par $f(x) = x + 40 + \dfrac{400}{x}$, pour $x \in [0;50]$.
$f(x)$ est exprimé en euros.

1. (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x+20)(x-20)}{x^2}$.
2. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;50]$ et en déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $[0;50]$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0;50]$.
3. Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	5	10	15	20	30	40	50
$f(x)$			81,7		83,3		

4. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités 1 cm pour 5 vases en abscisses et 1 cm pour 5 euros en ordonnées, en commençant la graduation à 60.

Partie C

Dans cette partie, le nombre de vases fabriqués est compris entre 5 et 50.

1. Combien l'usine doit-elle fabriquer de vases pour que le coût unitaire moyen soit minimal ? Indiquer ce coût.
2. Chaque vase est vendu 90 euros.
   (a) Construire sur le graphique précédent la droite Δ d'équation $y = 90$ et déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite Δ.
   (b) En déduire l'intervalle de production pour lequel l'entreprise réalise un bénéfice.
3. (a) Exprimer en fonction de x le prix de vente $V(x)$ réalisé lorsque l'entreprise vend x vases.
   (b) En utilisant la fonction coût $C(x)$ étudiée dans la partie A, donner l'expression du bénéfice $B(x)$ en fonction de x.
   (c) Calculer $B(10)$ et $B(40)$, puis $B(30)$. Ces résultats coïncident-ils avec ceux du 2b ?