Rappels

1 Trinôme du second degré

Définition 1. *On appelle* ***trinôme du second degré*** *toute fonction* $\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$ *avec a, b et c des nombres réels.*

Exemple 1. *Montrer que la fonction* $f(x) = 2x^2 + x - 3$ *est un trinôme du second degré et déterminer ses coefficients a, b et c.*

1.1 Forme canonique d'un trinôme du second degré

Théorème 1. *Tout trinôme du second degré* $\boxed{ax^2 + bx + c}$ *avec* $a \neq 0$ *peut s'écrire de façon unique sous la* ***forme canonique*** $\boxed{a(x-m)^2 + n}$. *On a alors* $\boxed{m = -\dfrac{b}{2a}}$ *et* $\boxed{n = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}}$.

Exercice 1. *Mettre le trinôme du second degré* $2x^2 + x - 3$ *sous sa forme canonique.*

1.2 Résolution de l'équation du second degré

Définition 2. *On appelle* ***discriminant*** *d'un trinôme du second degré* $ax^2 + bx + c$, *le réel* $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.

Théorème 2. *Soit* $ax^2 + bx + c = 0$ *une équation du second degré avec* $a \neq 0$.
- *Si* $\Delta < 0$, *l'équation n'admet aucune solution réelle.*
- *Si* $\Delta = 0$, *l'équation admet une unique solution* $\boxed{x_0 = -\dfrac{b}{2a}}$.
- *Si* $\Delta > 0$, *l'équation admet deux solutions* $\boxed{x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$ *et* $\boxed{x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$.

Exercice 2. *Résoudre l'équation du second degré* $2x^2 + x - 3 = 0$.

1.3 Signe d'un trinôme du second degré

Théorème 3. *Soit* $ax^2 + bx + c = 0$ *un trinôme du second degré avec* $a \neq 0$.
- *Si* $\Delta < 0$, *le trinôme est du signe de a et ne s'annule pas.*
- *Si* $\Delta = 0$, *le trinôme se factorise sous la forme* $\boxed{a(x - x_0)^2}$, *il est du signe de a et s'annule en* x_0.
- *Si* $\Delta > 0$, *le trinôme se factorise sous la forme* $\boxed{a(x - x_1)(x - x_2)}$, *il est du signe de a à l'extérieur des racines* x_1 *et* x_2 *et du signe contraire à l'intérieur des racines et s'annule en* x_1 *et* x_2.

Exercice 3. *Résoudre l'inéquation* $2x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$.

1.4 Représentation graphique d'un trinôme du second degré

Théorème 4. *La représentation graphique dans un repère orthonormé d'un fonction trinôme du second degré* $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n$ *avec* $a \neq 0$ *est une* ***parabole*** *telle que :*
- *son sommet a pour coordonnées* (m, n),
- *elle possède un axe de symétrie d'équation* $x = m$,
- *son orientation dépend su signe de a,*
- *les abscisses de ses points d'intersection éventuels avec l'axe des abscisses sont les racines du trinôme.*

Exercice 4. *Représenter par des schémas l'allure de la courbe représentative de la fonction trinôme dans les six cas de figure du théorème précédent.*

2 Dérivation

2.1 Nombre dérivé d'une fonction f en x_0.

Définition 3. *Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est dite dérivable en $x_0 \in I$ si le quotient $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite quand h tend vers 0, cette limite est alors appelée* nombre dérivé *de la fonction f en x_0 et notée $f'(x_0)$.*

Propriété 1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et dérivable en $x_0 \in I$ alors la courbe représentative de f admet une tangente au point $M_0(x_0; f(x_0))$ d'équation $\boxed{y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$.*

2.2 Fonctions dérivées

Définition 4. *Une fonction f définie sur un intervalle de I de $\mathbb{R}$ est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I, la fonction qui à tout réel $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x est appelée* fonction dérivée *de f et notée f'.*

Théorème 5. *Dérivées des fonctions usuelles.*

$f(x)$	*ensemble de définition*	*intervalle(s) de dérivabilité*	$f'(x)$
Cte	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$ax+b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
$x^n \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$]-\infty;0[\text{ et }]0;+\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n} = x^{-n} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$]-\infty;0[\text{ et }]0;+\infty[$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\mathbb{R}_+$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

Exercice 5. *Déterminer une équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^3$ au point d'abscisse 2.*

Théorème 6. *Dérivées et opérations.*

- *Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors la fonction $u+v : x \mapsto u(x)+v(x)$ est dérivable sur I et $\boxed{(u+v)'(x) = u'(x)+v'(x)}$.*
- *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel alors la fonction $ku : x \mapsto k \times u(x)$ est dérivable sur I et $\boxed{(ku)'(x) = k \times u'(x)}$.*
- *Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors la fonction $uv : x \mapsto u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I et $\boxed{(uv)'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)}$.*
- *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I ne s'annulant pas sur I alors la fonction $\dfrac{1}{u} : x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$ est dérivable sur I et $\boxed{\left(\dfrac{1}{u}\right)'(x) = -\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}}$.*
- *Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I avec v ne s'annulant pas sur I alors la fonction $\dfrac{u}{v} : x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}}$.*

Exercice 6. *Déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$.*

2.3 Dérivée et variations d'une fonction

Théorème 7. *On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I alors :*

- *Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$ alors f est constante sur I.*
- *Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ alors f est strictement décroissante sur I.*