Probabilités

1 Vocabulaire

Définition 1. *Une* expérience aléatoire *est une expérience dont le résultat est lié au hasard. Chaque résultat possible est appelé une* éventualité, *l'ensemble des éventualités est appelé* univers*.*

Exemple 1. *On considère le lancer d'un dé à six faces, l'univers est* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*.*

Définition 2. *On appelle* événement *un ensemble d'éventualités, c'est à dire une partie de l'univers. On distingue :*
- *événement* élémentaire *: il ne contient qu'une seule éventualité.*
- *événement* impossible *: il ne contient aucune éventualité.*
- *événement* certain *: il contient toutes les éventualités.*

Exemple 2. *On considère le lancer d'un dé à six faces.*
- *le 5 sort :* $A = \{5\}$*, événement élémentaire.*
- *un multiple de 2 sort :* $B = \{2, 4, 6\}$*.*
- *un multiple de 7 sort :* $C = \emptyset$*, événement impossible.*
- *un nombre inférieur à 7 sort :* $D = \Omega$*, événement certain.*

Définition 3.
- *On note* $E_1 \cap E_2$ *l'*intersection *de deux événements, c'est l'ensemble des éventualités appartenant à* E_1 et *à* E_2*.*
- *On note* $E_1 \cup E_2$ *l'*union *de deux événements, c'est l'ensemble des éventualités appartenant à* E_1 ou *à* E_2*.*
- *On note* $\overline{E}$ *le* contraire *de l'événement* E*, c'est l'ensemble des éventualités qui n'appartiennent pas à* E*.*
- *Deux événements* E_1 *et* E_2 *sont dits* incompatibles *si* $E_1 \cap E_2 = \emptyset$*, c'est à dire qu'ils ne peuvent se réaliser en même temps.*

Exemple 3. *Dans l'exemple précédent, on a :*

$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$ $\quad A \cap D = \{5\}$ $\quad \overline{B} = \{1, 3, 5\}$ $\quad A \cap B = \emptyset$ *donc* A *et* B *sont incompatibles*

Remarque 1.

$$\overline{\Omega} = \emptyset \qquad \overline{\emptyset} = \Omega \qquad \overline{\overline{E}} = E \qquad E \text{ et } \overline{E} \text{ sont incompatibles}$$

2 Notion de Probabilité

Définition 4. *On considère un univers fini* $\Omega = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$. *Une* loi de probabilité *sur* Ω *est l'association à chaque éventualité* e_i *de* Ω *d'un nombre réel* p_i *appelé probabilité tels que :* $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ *et* $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Si de plus on a $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \dfrac{1}{n}$, *la loi est dite* équirépartie.

Exemple 4. *On considère le lancer d'un dé équilibré :*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad P = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\}$$

On considère le lancer d'un dé truqué :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad P = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\}$$

Définition 5. *Étant donné un univers fini* Ω *muni d'une loi de probabilité* P, *on appelle probabilité d'un événement* E *et on note* $P(E)$ *la somme des probabilités* p_i *associées aux éventualités formant l'événement* E.

Remarque 2.

$$P(\emptyset) = 0 \qquad P(\Omega) = 1 \qquad 0 \leqslant P(E) \leqslant 1$$

Exemple 5. *Calcul de la probabilité d'obtenir un nombre pair dans le cas du dé truqué.*

Propriété 1. *On considère un univers* Ω *contenant* n *éventualités muni d'une loi de probabilité équirépartie* P, *alors si* E *est un événement contenant* p *éventualités on a :*

$$P(E) = \frac{p}{n} = \frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}}$$

Démonstration. au programme. □

Exemple 6. *Calcul de la probabilité d'obtenir un nombre pair dans le cas du dé équilibré.*

Propriété 2. *On considère une loi de probabilité* P *sur un univers fini* Ω *et deux événements* E_1 *et* E_2, *alors* $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$.

Démonstration. au programme. □

Corollaire 1. *On considère une loi de probabilité* P *sur un univers fini* Ω *et deux événements* E_1 *et* E_2 *incompatibles, alors* $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.

Démonstration. au programme. □

Corollaire 2. *On considère une loi de probabilité* P *sur un univers fini* Ω *et un événement* E, *alors* $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$.

Démonstration. au programme. □

3 Probabilités conditionnelles

Définition 6. *On considère un univers fini muni d'une loi de probabilité P et deux événements A et B avec $P(A) \neq 0$. On appelle* probabilité de B sachant A *:*

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemple 7. *Calcul de la probabilité d'obtenir un numéro pair sachant que l'on n'a pas obtenu un six dans le cas du dé truqué.*

Propriété 3. *On considère un univers fini muni d'une loi de probabilité P et deux événements A et B avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors :*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

Démonstration. au programme. □

Exercice 1. *Calcul de la probabilité de tirer successivement (sans remise) deux boules rouges dans une urne contenant 7 boules rouges et 13 boules vertes.*

Définition 7. *On considère un univers fini muni d'une loi de probabilité P et deux événements A et B avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Les événements A et B sont dits* indépendants *pour la probabilité P si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.*

Exemple 8. *Obtenir un numéro pair et obtenir un numéro multiple de trois dans le cas du dé équilibré et du dé truqué.*

Propriété 4. *On considère un univers fini muni d'une loi de probabilité P et deux événements A et B indépendants, alors :*

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{et} \quad P_B(A) = P(A)$$

Définition 8. *On considère un univers fini Ω. On dit que k événements $E_1, E_2, \ldots, E_k$ forment une* partition *de Ω si les événements E_i sont non vides, deux à deux incompatibles et si $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k = \Omega$.*

Remarque 3. *Si Ω est muni d'une loi de probabilité P, on a $P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_k) = 1$.*

Propriété 5. *Formule des probabilités totales*
On considère un univers fini Ω muni d'une loi de probabilité P et une partition $E_1, E_2, \ldots, E_k$ de Ω, alors pour tout événement E :

$$P(E) = P(E \cap E_1) + P(E \cap E_2) + \cdots + P(E \cap E_k)$$

Démonstration. au programme. □

Exemple 9. *Calcul de la probabilité de tirer successivement (sans remise) deux boules de couleurs différentes dans une urne contenant 7 boules rouges et 13 boules vertes.*

On appelera E l'événement « tirer deux boules de couleurs différentes » , E_1 l'événement « tirer une boule rouge au premier tirage » et E_2 l'événement « tirer une boule verte au premier tirage » . On pourra illustrer les calculs au moyen d'un arbre pondéré.