Lois de probabilité discrètes

1 Lois de probabilité

Définition 1. *On considère une expérience aléatoire dont l'univers est fini, muni d'une loi de probabilité et on associe à chaque éventualité un nombre réel. On appelle* loi de probabilité *de l'ensemble* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de ces nombres réels, l'ensemble des probabilités* $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *qui leur correspondent.*

Exercice 1. *On considère le lancer d'une pièce équilibrée et on associe à Face le nombre* 0 *et à Pile le nombre* 1*. Déterminer la loi de probabilité.*

Exercice 2. *On considère le lancer de deux dés à six faces équilibrés et on associe à chacune des éventualités la somme des numéros obtenus. Déterminer la loi de probabilité.*
(on représentera les résultats sous la forme d'un tableau avec en première ligne les réels x_i *et en deuxième les probabilités* p_i*)*

Définition 2. *On appelle* expérience de Bernoulli *une expérience aléatoire ne comportant que deux éventualités possibles appelées* « succès » *et* « échec »*. On associe à l'éventualité « succès » le nombre* 1 *et à l'éventualité « échec » le nombre* 0*, on note* p *la probabilité correspondant à l'éventualité « succès » et* $q = 1 - p$ *la probabilité correspondant à l'éventualité « échec ».*
On appelle loi de Bernoulli *la loi de probabilité de l'expérience de Bernoulli :*

x_i	0	1
p_i	$q = 1 - p$	p

Exercice 3. *On considère le lancer d'un pièce truquée pour laquelle on a deux fois plus de chances d'obtenir Pile que Face, on nomme « succès » l'éventualité « obtenir Pile » et « échec » l'éventualité « obtenir Face ». Déterminer la loi de probabilité.*

Définition 3. *On répète* n *expériences de Bernoulli de paramètre* p *identiques et indépendantes, la loi de probabilité du nombre de succès obtenus est appelée appelle* loi Binomiale *de paramètres* n *et* p*.*

Exercice 4. *On lance trois fois une pièce truquée pour laquelle on a deux fois plus de chances d'obtenir Pile que Face. Déterminer la loi de probabilité du nombre de Pile obtenus.*

Exercice 5. *On lance deux fois un dé équilibré. Déterminer la loi de probabilité du nombre de six obtenus.*

2 Espérance d'une loi de probabilité discrète

Définition 4. *On considère une loi de probabilité discrète* $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *d'un ensemble de nombres réels* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*. On appelle* espérance *de la loi de probabilité :*

$$E = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots + x_n \times p_n$$

On appelle variance *de la loi de probabilité :*

$$V = (x_1 - E)^2 \times p_1 + (x_2 - E)^2 \times p_2 + \cdots + (x_n - E)^2 \times p_n$$

Remarque 1. *L'espérance correspond à la moyenne des nombres réels* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *pondérée par les coefficients* $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$*. La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.*

Exercice 6. *On considère le lancer de deux dés à six faces équilibrés. Déterminer la loi de probabilité, l'espérance et la variance de la somme des numéros obtenus.*

Propriété 1. *L'espérance d'une loi binomiale de paramètres* n *et* p *est* $\boxed{E = n \times p}$.

Démonstration. admis. □

Exercice 7. *On lance cent fois une pièce truquée pour laquelle on a deux fois plus de chances d'obtenir Pile que Face. Déterminer l'espérance du nombre de Pile obtenus.*