Devoir commun de Mathématiques n°2

le 10 novembre 2009
durée : 2h00

NOM :

PRÉNOM :

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte. On demande d'entourer cette réponse sur l'énoncé. Une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une mauvaise réponse enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

QUESTIONS	RÉPONSES
1. L'univers est :	• un ensemble vide • un événement certain • un événement élémentaire
2. Deux événements élémentaires sont forcément :	• égaux ou bien incompatibles • contraires ou bien certains • impossibles ou bien certains
3. Si B est l'événement contraire de A, alors :	• $P(A) = 1 + P(B)$ • $P(A) = 1 - P(B)$ • $P(A) = P(B)$
4. Si $P(A) = P(B)$, alors :	• $A = B$ • A et B sont équiprobables • A et B sont indépendants
5. La probabilité $P(A \cup B)$ est :	• égale à $P(A) + P(B)$ • supérieure ou égale à $P(A) + P(B)$ • inférieure ou égale à $P(A) + P(B)$
6. Si A et B sont deux événements indépendants avec $P(A) \neq 0$, alors :	• $A \cap B = \emptyset$ • $P(A \cup B) = P(A) \times P(B)$ • $P_A(B) = P(B)$
7. Si A et B sont deux événements incompatibles, alors :	• $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ • $P(A) = 1 - P(B)$ • $P(A \cap B) = 1$
8. Si $P(A) \neq 0$ alors $P(A \cap B)$ est égale à :	• $P(A) \times P(B)$ • $P_B(A) \times P(A)$ • $P(A) \times P_A(B)$

Exercice 2 **(6 points)**

Pour fabriquer un appareil on utilise successivement et dans cet ordre deux machines M_1 et M_2. La machine M_1 peut provoquer deux défauts d_1 et d_2 et la machine M_2 peut provoquer un défaut d_3. Un relevé statistique permet d'estimer que :

- 4 % des appareils sortant de M_1 présentent le défaut d_1 et lui seul ;
- 2 % des appareils sortant de M_1 présentent le défaut d_2, et lui seul ;
- 1 % des appareils sortant de M_1 présentent à la fois les défauts d_1 et d_2 ;
- 60 % des appareils ayant au moins un défaut en sortant de M_1 présentent le défaut d_3 en sortant de M_2 ;
- 3 % des appareils sans défaut à la sortie de M_1 présentent le défaut d_3 en sortant de M_2.

1. On prélève au hasard un appareil après son passage dans la machine M_1. On note A l'événement « l'appareil présente le défaut d_1 » et B l'événement « l'appareil présente le défaut d_2 ».
   (a) Calculer les probabilités des événements A et B. Les événements A et B sont-ils indépendants ? (on pourra s'aider d'un tableau à double entrée)
   (b) Soit D l'événement « l'appareil présente au moins un défaut ». Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à 0,07.
   (c) Quelle est la probabilité pour qu'un appareil sortant de la machine M_1 ne présente aucun défaut ?
2. On prélève au hasard un appareil après les passages successifs dans les machines M_1 et M_2. On note C l'événement « l'appareil présente le défaut d_3 ».
   (a) Calculer la probabilité de l'événement C. (on pourra s'aider d'un arbre pondéré)
   (b) Quelle est la probabilité pour qu'un appareil sortant des machines M_1 et M_2 ne présente aucun défaut ?

Exercice 3 **(10 points)**

La Commission Européenne, dans son rapport du 8 juillet 1999, détaille ainsi l'évaluation du test W pour le diagnostic de I'ESB (Encéphalopathie Spongiforme Bovine) :

- La proportion des réactions POSITIVES au test effectué sur des tissus nerveux provenant d'animaux infectés est égale à 70 %.
- La proportion des réactions NÉGATIVES au test effectué sur des tissus nerveux provenant d'animaux non infectés est égale à 90 %.

On envisage un dépistage dans un cheptel bovin. On choisit dans le cheptel un animal au hasard.
On désigne par M l'événement « l'animal est malade » et par T l'événement « le test est positif ».

Partie A

On estime à $0,07$ la fréquence d'animaux malades dans le cheptel.

1. Construire un arbre pondéré représentant cette situation.
2. En utilisant cet arbre, calculer $P(M \cap T)$ puis $P(T)$.
3. En déduire la probabilité que l'animal soit malade sachant que le test est positif. On donnera la valeur arrondie à 10^{-3}.

Partie B

On estime maintenant à x la fréquence d'animaux malades dans le cheptel.

1. Construire un arbre pondéré représentant cette situation.
2. En utilisant cet arbre, exprimer $P(M \cap T)$ puis $P(T)$ en fonction de x.
3. Montrer qu'alors la probabilité que l'animal soit malade sachant que le test est positif est égale à $\dfrac{7x}{6x+1}$.
4. Soit f la fonction numérique de la variable x définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \dfrac{7x}{6x+1}$.
   (a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$.
   (b) Résoudre sur l'intervalle $[0;1]$ l'inéquation $f(x) \geqslant 0,9$. Interpréter le résultat.