Correction du devoir commun de Mathématiques n°2

Exercice 1

QUESTIONS	RÉPONSES
1. L'univers est :	• un événement certain
2. Deux événements élémentaires sont forcément :	• égaux ou bien incompatibles
3. Si B est l'événement contraire de A, alors :	• $P(A) = 1 - P(B)$
4. Si $P(A) = P(B)$, alors :	• A et B sont équiprobables
5. La probabilité $P(A \cup B)$ est :	• inférieure ou égale à $P(A) + P(B)$
6. Si A et B sont deux événements indépendants avec $P(A) \neq 0$, alors :	• $P_A(B) = P(B)$
7. Si A et B sont deux événements incompatibles, alors :	• $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
8. Si $P(A) \neq 0$ alors $P(A \cap B)$ est égale à :	• $P(A) \times P_A(B)$

Exercice 2

1. (a) On a le tableau à double entrée suivant :

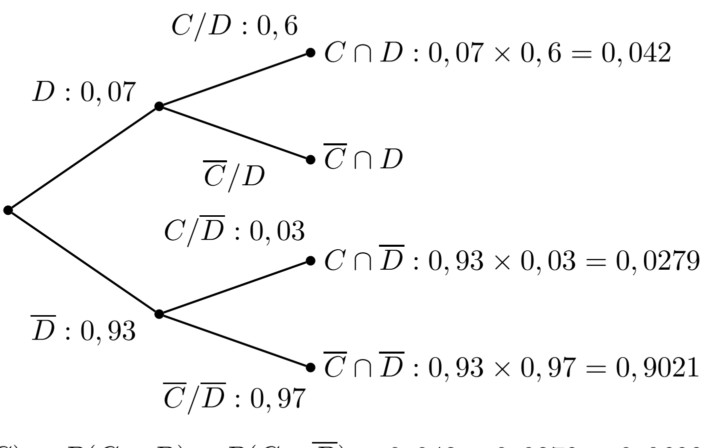
	appareils présentant le défaut d_1	appareils ne présentant pas le défaut d_1	total
appareils présentant le défaut d_2	**1**	**2**	3
appareils ne présentant pas le défaut d_2	**4**	93	97
total	5	95	100

On en déduit que $P(A) = \dfrac{5}{100}$ et $P(B) = \dfrac{3}{100}$. De plus $P(A \cap B) = \dfrac{1}{100} \neq P(A) \times P(B)$ donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

(b) D'après le tableau précédent, $P(D) = \dfrac{1+2+4}{100} = 0,07$.

(c) On a $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,07 = 0,93$.

2. On a l'arbre pondéré suivant :



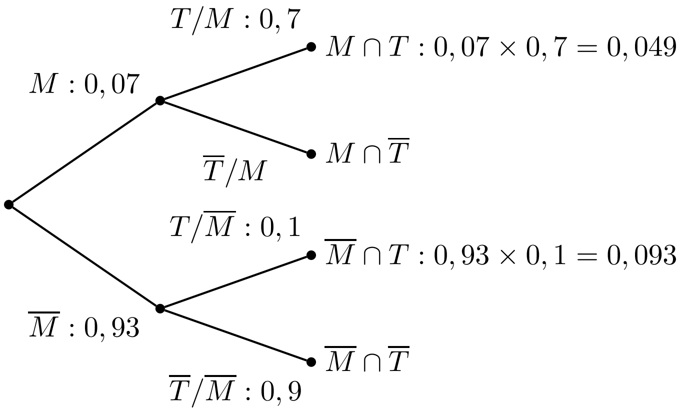
(a) On en déduit $P(C) = P(C \cap D) + P(C \cap \overline{D}) = 0,042 + 0,0279 = 0,0699$.

(b) La probabilité cherchée est $P(\overline{C} \cap \overline{D}) = 0,9021$.

Exercice 3

Partie A

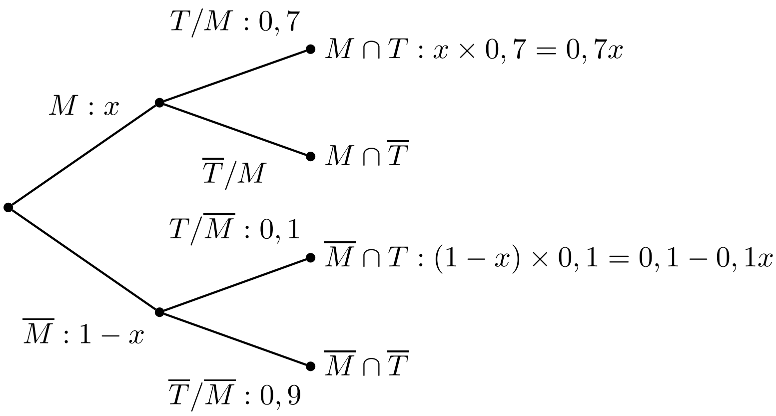
1. On a l'arbre pondéré suivant :



2. On en déduit $P(M \cap T) = 0,049$ et $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,049 + 0,093 = 0,142$.
3. On a $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,049}{0,142} \simeq 0,345$.

Partie B

1. On a l'arbre pondéré suivant :



2. On en déduit $P(M \cap T) = 0,7x$ et $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,7x + 0,1 - 0,1x = 0,6x + 0,1$.
3. On a $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,7x}{0,6x + 0,1} = \dfrac{7x}{6x+1}$.
4. (a) La fonction f est une fraction rationnelle sans valeur interdite sur l'intervalle $[0;1]$, elle est donc dérivable sur cet intervalle et :

$$f'(x) = \frac{7 \times (6x+1) - 7x \times 6}{(6x+1)^2} = \frac{7}{(6x+1)^2}$$

La dérivée f' est positive, la fonction f est donc croissante sur l'intervalle $[0;1]$.

(b) Sur l'intervalle $[0;1]$, on a $6x + 1 > 0$ donc :

$$f(x) \geqslant 0,9 \iff 7x \geqslant 0,9 \times (6x+1) \iff 7x \geqslant 5,4x + 0,9 \iff 1,6x \geqslant 0,9 \iff x \geqslant 0,5625$$

On en conclut que dans le cas d'un test positif, l'animal est malade à plus de 90 chances sur 100 dès lors que la fréquence d'animaux malades dans le cheptel est supérieure à $0,5625$.