Limite d'une fonction

1 Continuité d'une fonction

Définition 1. *Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite* continue sur I *si sa courbe représentative peut être tracée sans lever le crayon.*

Exemple 1. *La fonction carré est continue sur $\mathbb{R}$.*

Contre-exemple 1. *La fonction inverse n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.*

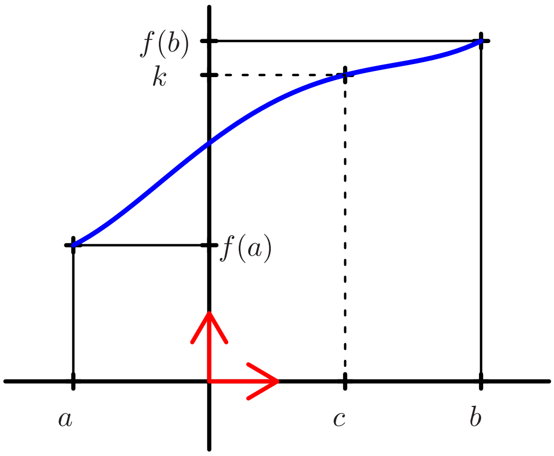
Contre-exemple 2. *La fonction partie entière E qui a x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.*

Propriété 1.

- *Les fonctions de référence (fonctions affines, fonction carré, fonction inverse et fonction racine carrée) sont continues sur chacun des intervalles de leur ensemble de définition.*
- *Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.*
- *Les fonctions rationnelles sont continues sur chacun des intervalles de leur ensemble de définition.*

Démonstration. admis. □

Théorème 1. Théorème des valeurs intermédiaires
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a et b deux réels de I. Pour tout réel $k \in [f(a); f(b)]$ il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.



Démonstration. admis. □

Corollaire 1. *Soit f une fonction définie, continue et* strictement monotone *sur un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$. Alors pour tout réel $k \in [f(a); f(b)]$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a; b]$.*

Démonstration. admis. □

Exercice 1. *Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$ et en donner une valeur approchée au dixième.*

2 Limite d'une fonction

On suppose connues les limites des fonctions de référence.

2.1 Asymptotes à une courbe

Définition 2. *Soit f une fonction et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.*

- *La droite d'équation $x = a$ est une* asymptote verticale *à la courbe $\mathcal{C}$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.*
- *La droite d'équation $y = b$ est une* asymptote horizontale *à la courbe $\mathcal{C}$ en $\pm\infty$ si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.*
- *La droite d'équation $y = mx + p$ est une* asymptote oblique *à la courbe $\mathcal{C}$ en $\pm\infty$ si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + p)] = 0$.*

Exercice 2. *Montrer que la courbe représentative de la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 4}{x - 1}$ admet une asymptote verticale ainsi qu'une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 1$.*

2.2 Opérations sur les limites

Théorème 2.

- Limite de la somme de deux fonctions :

$\lim\limits_{x \to} u(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to} v(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to} [u(x) + v(x)]$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

- Limite du produit de deux fonctions :

$\lim\limits_{x \to} u(x)$	l	$l \neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{x \to} v(x)$	l'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x \to} [u(x) \times v(x)]$	$l \times l'$	∞	?	∞

Le signe de la limite s'obtenant au moyen de la règle des signes pour la multiplication.

- Limite du quotient de deux fonctions :

$\lim\limits_{x \to} u(x)$	l	$l \neq 0$	∞	l	∞	0
$\lim\limits_{x \to} v(x)$	$l' \neq 0$	0	l'	∞	∞	0
$\lim\limits_{x \to} \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{l}{l'}$	∞	∞	0	?	?

Le signe de la limite s'obtenant au moyen de la règle des signes pour la division.

Démonstration. admis. □

Théorème 3.

- *La limite en $\pm\infty$ d'une fonction polynôme est la limite en $\pm\infty$ de son terme de plus haut degré.*
- *La limite en $\pm\infty$ d'une fonction rationnelle est la limite en $\pm\infty$ du quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.*

Démonstration. admis. □

Théorème 4. *Soient u et v deux fonctions et α un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.*

- *Si $u(x) \leqslant v(x)$ pour tout $x \in I$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} v(x) = +\infty$.*
- *Si $u(x) \leqslant v(x)$ pour tout $x \in I$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} v(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = -\infty$.*

Démonstration. admis. □