

Correction du devoir maison de Mathématiques n°6

Exercice 1

1. La fonction f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 3x^2 - 1$. On en déduit ses variations :

x	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
$f'(x)$	+ 0 -	0 +
$f(x)$	\nearrow $\simeq 1,4$ \searrow $\simeq 0,6$ \nearrow	

2. – Sur l'intervalle $[-\sqrt{\frac{1}{3}}; +\infty[$, la fonction f est continue et strictement positive donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution.
 – Sur l'intervalle $] -\infty; -\sqrt{\frac{1}{3}}]$, la fonction f est continue et strictement croissante avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $f(-\sqrt{\frac{1}{3}}) > 0$ donc d'après le **théorème des valeurs intermédiaires** l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 . De plus $f(-2) = -5 < 0$ et $f(-1) = 1 > 0$ donc $x_0 \in [-2; -1]$.
3. On a $f(-1,325) \simeq -0,0012 < 0$ et $f(-1,324) \simeq 0,3549 > 0$ donc $x_0 \in] -1,325; -1,324[$.

Exercice 2

1. On a $\mathcal{D}_f =] -\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.
 2. La fonction f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur $] -\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$ avec :

$$f'(x) = \frac{(2x-1) \times (x-1) - (x^2-x+4) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - x^2 + x - 4}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

On en déduit les variations de la fonction f :

x	-1	1	3
$f'(x)$	+ 0 -	- 0 +	
$f(x)$	\nearrow -3 \searrow		\searrow 5 \nearrow

3. (a) On a $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x + 4) = 4$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x-1) = 0_-$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x-1) = 0_+$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$. La droite d'équation $x = 1$ est donc une asymptote verticale à gauche et à droite à la courbe \mathcal{C} .
 (b) On a :

$$f(x) - x = \frac{x^2 - x + 4}{x-1} - x = \frac{x^2 - x + 4 - x(x-1)}{x-1} = \frac{x^2 - x + 4 - x^2 + x}{x-1} = \frac{4}{x-1}$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = 0$ donc la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe \mathcal{C} en $\pm\infty$.

(c) La courbe \mathcal{C} est la suivante :

