Correction du devoir maison de Mathématiques n°6

Exercice 1

1. La fonction f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 1$. On en déduit ses variations :

x		$-\sqrt{\frac{1}{3}}$		$\sqrt{\frac{1}{3}}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\simeq 1,4$	$\searrow$	$\simeq 0,6$	$\nearrow$

2. – Sur l'intervalle $[-\sqrt{\frac{1}{3}}; +\infty[$, la fonction f est continue et strictement positive donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution.
   – Sur l'intervalle $]-\infty; -\sqrt{\frac{1}{3}}]$, la fonction f est continue et strictement croissante avec $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$ et $f(-\sqrt{\frac{1}{3}}) > 0$ donc d'après le **théorème des valeurs intermédiaires** l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0. De plus $f(-2) = -5 < 0$ et $f(-1) = 1 > 0$ donc $x_0 \in [-2; -1]$.
3. On a $f(-1,325) \simeq -0,0012 < 0$ et $f(-1,324) \simeq 0,3549 > 0$ donc $x_0 \in]-1,325; -1,324[$.

Exercice 2

1. On a $\mathcal{D}_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.
2. La fonction f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$ avec :

$$f'(x) = \frac{(2x-1)\times(x-1) - (x^2 - x + 4)\times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - x^2 + x - 4}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

   On en déduit les variations de la fonction f :

x		-1		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	5	$\nearrow$

3. (a) On a $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - x + 4) = 4$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x-1) = 0_-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x-1) = 0_+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$. La droite d'équation $x = 1$ est donc une asymptote verticale à gauche et à droite à la courbe $\mathcal{C}$.

   (b) On a :

$$f(x) - x = \frac{x^2 - x + 4}{x-1} - x = \frac{x^2 - x + 4 - x(x-1)}{x-1} = \frac{x^2 - x + 4 - x^2 + x}{x-1} = \frac{4}{x-1}$$

   On en déduit que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - x] = 0$ donc la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ en $\pm\infty$.

(c) La courbe $\mathcal{C}$ est la suivante :