

# Devoir commun de Mathématiques n°3

le 15 décembre 2009  
durée : 2h00

NOM :

PRÉNOM :

## Exercice 1

*Dans cet exercice les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.*

Lors d'une épizootie, on s'est aperçu que si la maladie était diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal (avant que les symptômes apparaissent), on pouvait le guérir, sinon la maladie était mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon bien connu d'animaux dont 1% sont porteurs de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un animal est malade, le test est positif dans 85% des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95% des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie. On note :

- $M$ , l'événement : « L'animal est atteint par la maladie » ;
- $P$ , l'événement : « Le test est positif » ;
- $N$ , l'événement : « Le test est négatif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
  - (a) Quelle est la probabilité qu'il soit malade et que son test soit positif ?
  - (b) Vérifier que la probabilité pour que son test soit positif est 0,0580.
3. Un animal est choisi parmi ceux dont le test est positif, quelle est la probabilité pour qu'il soit malade ?
4. On choisit 5 animaux au hasard, dans un troupeau suffisamment important pour que les épreuves puissent être considérées comme indépendantes et que les tirages puissent être assimilés à des tirages avec remise. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq ait un test positif ?
5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant un test positif est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit. D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1000
Probabilité	0,9405	0,058	0,0015

Un éleveur possédant un troupeau de 2000 bêtes vous demande une prévision du coût à engager à la suite d'un passage du test à tout le troupeau : quelle réponse proposez-vous ?

## Exercice 2

### Partie A

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^3 - 12x - 18$ .

1. Montrer que  $g$  est dérivable et calculer  $g'(x)$ .
2. Étudier le signe de  $g'(x)$ .
3. Déterminer la limite de  $g(x)$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
4. En déduire le tableau de variations de la fonction  $g$ .
5. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$  dont on donnera une valeur approchée au dixième.
6. En déduire le tableau de signes de la fonction  $g$ .

### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - 4}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .
2. Étudier les limites de la fonction  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que la courbe représentative de la fonction  $f$  admet deux asymptotes verticales.
4. Montrer que la courbe représentative de la fonction  $f$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = x + 2$ .
5. Montrer que sur les intervalles où  $f$  est dérivable, on a  $f'(x) = \frac{x \times g(x)}{(x^2 - 4)^2}$ .
6. Étudier le signe de  $f'(x)$  et en déduire le tableau de variations de la fonction  $f$ .