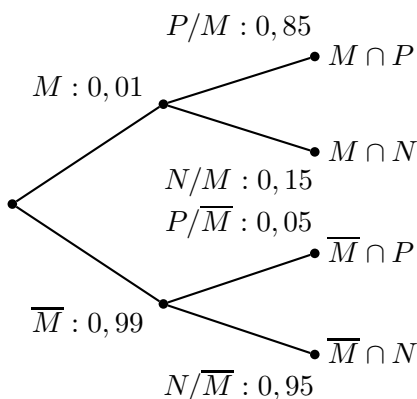


Correction du devoir commun de Mathématiques n°3

Exercice 1

1. On a l'arbre pondéré suivant :



2. (a) On a $P(M \cap P) = p(M) \times P_M(P) = 0,01 \times 0,85 = 0,0085$.
 (b) On a $P(\bar{M} \cap P) = p(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(P) = 0,99 \times 0,05 = 0,0495$. D'après la formule des *probabilités totales* on a $P(P) = P(M \cap P) + P(\bar{M} \cap P) = 0,0085 + 0,0495 = 0,058$.
3. On a $P_P(M) = \frac{P(M \cap P)}{P(P)} = \frac{0,0085}{0,058} = \frac{17}{116} \simeq 0,1466$.
- note du correcteur :** Dans les deux questions suivantes, les calculs ne portent plus sur l'échantillon bien connu du départ. En raison de la *fluctuation d'échantillonnage* les probabilités précédentes ne sont pas forcément conservées, on choisit de faire comme si elles l'étaient pour répondre aux questions (même si ceci est irréaliste).
4. L'événement contraire est « les 5 animaux ont un test négatif » dont la probabilité est $(1 - 0,058)^5$ car les épreuves sont indépendantes, la probabilité cherchée est donc $1 - (1 - 0,058)^5 \simeq 0,2583$.
5. L'espérance du coût à engager par animal est $0 \times 0,9405 + 100 \times 0,058 + 1000 \times 0,0015 = 7,3$. Une prévision du coût à engager pour l'ensemble du troupeau est donc $2000 \times 7,3 = 14600\text{€}$.

Exercice 2

Partie A

1. La fonction g est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = 3x^2 - 12$.
 2. On a $g'(x) = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$ on en déduit son tableau de signes :

x	-2	2
$g'(x)$	$+$	$-$
	0	0
	$+$	$+$

3. La limite en l'infini d'une fonction polynôme est la limite de son terme de plus haut degré donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

4. On en déduit le tableau de variations de la fonction g :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	-2	-34	$+\infty$

5. – Sur l'intervalle $] -\infty; 2]$ on a $g(x) < 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution.
 – Sur l'intervalle $[2; +\infty[$, la fonction g est continue et strictement croissante avec $g(2) = -34 < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ donc d'après le *Théorème des Valeurs Intermédiaires* l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α . En utilisant la calculatrice, on obtient $\alpha \simeq 4,1$.
6. On en déduit le tableau de signes de la fonction g :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		$-$	0
			$+$

Partie B

1. On a $\mathcal{D}_f =] -\infty; -2[\cup] -2; 2[\cup] 2; +\infty[$.
2. La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est la limite du quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

De plus :

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 2x^2 + 1) = 1 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} (x^2 - 4) = 0_+ \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 2x^2 + 1) = 1 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} (x^2 - 4) = 0_- \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 2x^2 + 1) = 17 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x^2 - 4) = 0_- \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 2x^2 + 1) = 17 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x^2 - 4) = 0_+ \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$$

3. D'après les limites précédentes, la courbe représentative de la fonction f admet deux asymptotes verticales d'équations $x = -2$ et $x = 2$.
4. On a :

$$f(x) - (x + 2) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - 4} - \frac{(x^2 - 4)(x + 2)}{x^2 - 4} = \frac{x^3 + 2x^2 + 1 - (x^3 + 2x^2 - 4x - 8)}{x^2 - 4} = \frac{4x + 9}{x^2 - 4}$$

Or $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x + 9}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x} = 0$ donc la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote oblique d'équation $y = x + 2$.

5. La fonction f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur chacun des intervalles de son ensemble de définition et :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x)(x^2 - 4) - (x^3 + 2x^2 + 1)(2x)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 16x) - (2x^4 + 4x^3 + 2x)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2 - 18x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2 - 4)^2}$$

6. On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$	-2	0	2	α	$+\infty$
x		$-$	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$		$-$	$-$	$-$	$-$	0
$f'(x)$		$+$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$		$+\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
	$-\infty$	\nearrow	$-\infty$	\nearrow	\searrow	$-\infty$
					\searrow	\nearrow