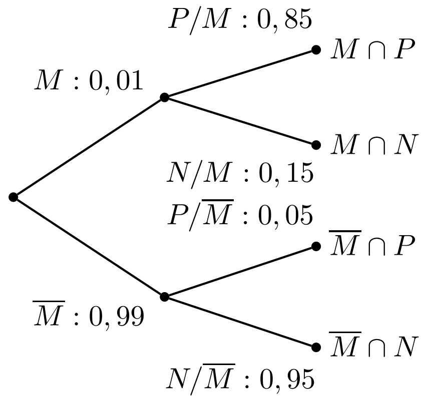
Correction du devoir commun de Mathématiques n°3

Exercice 1

1. On a l'arbre pondéré suivant :



2. (a) On a $P(M \cap P) = p(M) \times P_M(P) = 0,01 \times 0,85 = 0,0085$.
   (b) On a $P(\overline{M} \cap P) = p(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(P) = 0,99 \times 0,05 = 0,0495$. D'après la formule des *probabilités totales* on a $P(P) = P(M \cap P) + P(\overline{M} \cap P) = 0,0085 + 0,0495 = 0,058$.
3. On a $P_P(M) = \dfrac{P(M \cap P)}{P(P)} = \dfrac{0,0085}{0,058} = \dfrac{17}{116} \simeq 0,1466$.
   note du correcteur : Dans les deux questions suivantes, les calculs ne portent plus sur l'échantillon bien connu du départ. En raison de la *fluctuation d'échantillonnage* les probabilités précédentes ne sont pas forcément conservées, on choisit de faire comme si elles l'étaient pour répondre aux questions (même si ceci est irréaliste).
4. L'événement contraire est « les 5 animaux ont un test négatif » dont la probabilité est $(1 - 0,058)^5$ car les épreuves sont indépendantes, la probabilité cherchée est donc $1 - (1 - 0,058)^5 \simeq 0,2583$.
5. L'espérance du coût à engager par animal est $0 \times 0,9405 + 100 \times 0,058 + 1000 \times 0,0015 = 7,3$. Une prévision du coût à engager pour l'ensemble du troupeau est donc $2000 \times 7,3 = 14600$€.

Exercice 2

Partie A

1. La fonction g est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 3x^2 - 12$.
2. On a $g'(x) = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$ on en déduit son tableau de signes :

x		-2		2	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

3. La limite en l'infini d'une fonction polynôme est la limite de son terme de plus haut degré donc :

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

4. On en déduit le tableau de variations de la fonction g :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$g(x)$			-2				$+\infty$
		↗		↘		↗	
	$-\infty$				-34		

5. – Sur l'intervalle $]-\infty;2]$ on a $g(x)<0$ donc l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution.
   – Sur l'intervalle $[2;+\infty[$, la fonction g est continue et strictement croissante avec $g(2)=-34<0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ donc d'après le *Théorème des Valeurs Intermédiaires* l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α. En utilisant la calculatrice, on obtient $\alpha \simeq 4,1$.
6. On en déduit le tableau de signes de la fonction g :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1. On a $\mathcal{D}_f =]-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[$.
2. La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est la limite du quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur donc :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

De plus :

$$\lim_{x\to-2}(x^3+2x^2+1)=1 \qquad \lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}}(x^2-4)=0_+ \qquad \text{donc} \qquad \lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2}(x^3+2x^2+1)=1 \qquad \lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}}(x^2-4)=0_- \qquad \text{donc} \qquad \lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to2}(x^3+2x^2+1)=17 \qquad \lim_{\substack{x\to2\\x<2}}(x^2-4)=0_- \qquad \text{donc} \qquad \lim_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to2}(x^3+2x^2+1)=17 \qquad \lim_{\substack{x\to2\\x>2}}(x^2-4)=0_+ \qquad \text{donc} \qquad \lim_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=+\infty$$

3. D'après les limites précédentes, la courbe représentative de la fonction f admet deux asymptotes verticales d'équations $x=-2$ et $x=2$.
4. On a :

$$f(x)-(x+2) = \frac{x^3+2x^2+1}{x^2-4} - \frac{(x^2-4)(x+2)}{x^2-4} = \frac{x^3+2x^2+1-(x^3+2x^2-4x-8)}{x^2-4} = \frac{4x+9}{x^2-4}$$

Or $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x+9}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x} = 0$ donc la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote oblique d'équation $y=x+2$.

5. La fonction f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur chacun des intervalles de son ensemble de définition et :

$$f'(x) = \frac{(3x^2+4x)(x^2-4)-(x^3+2x^2+1)(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{(3x^4+4x^3-12x^2-16x)-(2x^4+4x^3+2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4-12x^2-18x}{(x^2-4)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2-4)^2}$$

6. On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-2			0			2		α		$+\infty$
x		$-$			$-$	0	$+$			$+$		$+$	
$g(x)$		$-$			$-$		$-$			$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	||		$+$	0	$-$		||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $-\infty$		↗	$-\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$	|| $+\infty$	↘		↗	$+\infty$