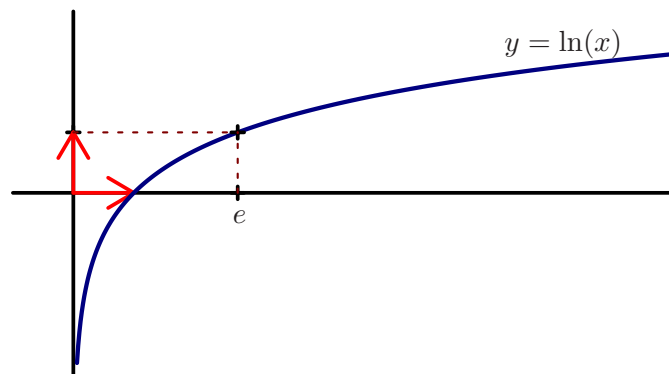


Fonctions Logarithme népérien et Exponentielle

1 Fonction Logarithme népérien

Définition 1. On appelle fonction Logarithme népérien la fonction $\ln : x \mapsto \ln(x)$ définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$.



On appelle e le nombre réel tel que $\ln(e) = 1$.

Propriété 1. La fonction \ln est croissante, négative sur $]0; 1]$ et positive sur $[1; +\infty[$, de plus $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Propriété 2. La fonction \ln vérifie les relations suivantes pour tous nombres réels x et y strictement positifs et pour tout entier relatif n :

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

2. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

3. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

4. $\ln(x^n) = n \ln(x)$

5. $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$

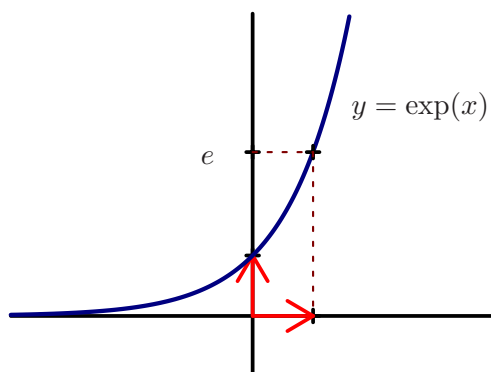
Corollaire 1. Pour tout entier relatif n , on a $\ln(e^n) = n$.

Propriété 3. Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur $]0; +\infty[$, alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable et $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

Exemple 1. Déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ et étudier ses variations.

2 Fonction Exponentielle

Définition 2. On appelle fonction Exponentielle la fonction $\exp : x \mapsto \exp(x)$ définie sur \mathbb{R} par $\exp(x) = y$ avec $\ln(y) = x$.



On note $\boxed{\exp(x) = e^x}$.

Propriété 4. La fonction \exp est dérivable et $\boxed{\exp'(x) = \exp(x)}$, elle est croissante et strictement positive, de plus $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0}$ et $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty}$.

Propriété 5. On a $\boxed{\ln(e^x) = x}$ pour tout réel x et $\boxed{e^{\ln(x)} = x}$ pour tout réel $x > 0$.

Propriété 6. La fonction \exp vérifie les relations suivantes pour tous nombres réels x et y et pour tout entier relatif n :

1. $\boxed{e^{x+y} = e^x e^y}$

2. $\boxed{e^{-x} = \frac{1}{e^x}}$

3. $\boxed{e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}}$

4. $\boxed{e^{nx} = (e^x)^n}$

Propriété 7. Si u est une fonction dérivable, alors la fonction e^u est dérivable et $\boxed{(e^u)' = u' e^u}$.

Exemple 2. Déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = e^{x^2+1}$ et étudier ses variations.

Définition 3. Soit a un nombre réel strictement positif, on appelle fonction exponentielle de base a la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto a^x = e^{x \ln(a)}$.

Propriété 8. Pour tout nombre réel a strictement positif et pour tous réels x et y , on a :

1. $\boxed{a^{x+y} = a^x a^y}$

2. $\boxed{a^{-x} = \frac{1}{a^x}}$

3. $\boxed{a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}}$

4. $\boxed{a^{xy} = (a^x)^y}$