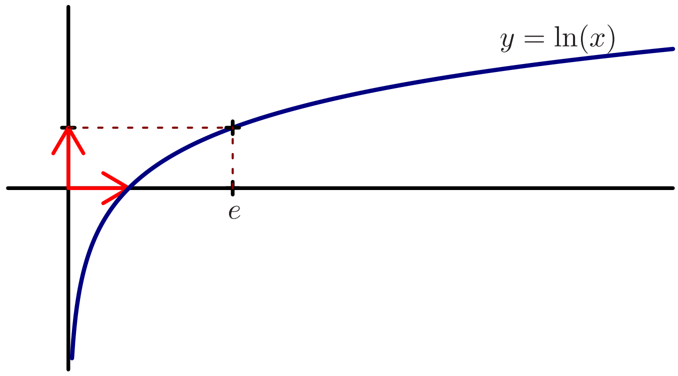
Fonctions Logarithme népérien et Exponentielle

1 Fonction Logarithme népérien

Définition 1. *On appelle fonction* Logarithme népérien *la fonction* $\ln : x \mapsto \ln(x)$ *définie sur l'intervalle* $]0;+\infty[$ *par* $\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$ *et* $\boxed{\ln(1) = 0}$.



On appelle e *le nombre réel tel que* $\boxed{\ln(e) = 1}$.

Propriété 1. *La fonction* $\ln$ *est croisssante, négative sur* $]0;1]$ *et positive sur* $[1;+\infty[$, *de plus* $\boxed{\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty}$ *et* $\boxed{\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty}$.

Propriété 2. *La fonction* $\ln$ *vérifie les relations suivantes pour tous nombres réels* x *et* y *strictement positifs et pour tout entier relatif* n *:*

1. $\boxed{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)}$
2. $\boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)}$
3. $\boxed{\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)}$
4. $\boxed{\ln(x^n) = n\ln(x)}$
5. $\boxed{\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)}$

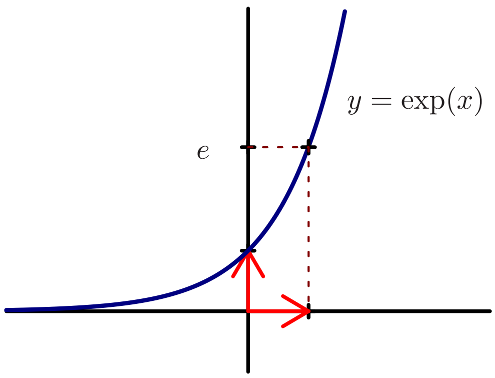
Corollaire 1. *Pour tout entier relatif* n, *on a* $\boxed{\ln(e^n) = n}$.

Propriété 3. *Si* u *est une fonction dérivable et strictement positive sur* $]0;+\infty[$, *alors la fonction* $\ln(u)$ *est dérivable et* $\boxed{(\ln(u))' = \frac{u'}{u}}$.

Exemple 1. *Déterminer la dérivée de la fonction* $f(x) = \ln(x^2+1)$ *et étudier ses variations.*

2 Fonction Exponentielle

Définition 2. *On appelle fonction* Exponentielle *la fonction* exp : $x \mapsto \exp(x)$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par exp*$(x) = y$ *avec* $\ln(y) = x$.



On note $\boxed{\exp(x) = e^x}$.

Propriété 4. *La fonction* exp *est dérivable et* $\boxed{\exp'(x) = \exp(x)}$ *, elle est croisssante et strictement positive, de plus* $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0}$ *et* $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$.

Propriété 5. *On a* $\boxed{\ln(e^x) = x}$ *pour tout réel* x *et* $\boxed{e^{\ln(x)} = x}$ *pour tout réel* $x > 0$.

Propriété 6. *La fonction* exp *vérifie les relations suivantes pour tous nombres réels* x *et* y *et pour tout entier relatif* n *:*

1. $\boxed{e^{x+y} = e^x e^y}$
2. $\boxed{e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}}$
3. $\boxed{e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}}$
4. $\boxed{e^{nx} = (e^x)^n}$

Propriété 7. *Si* u *est une fonction dérivable, alors la fonction* e^u *est dérivable et* $\boxed{(e^u)' = u'e^u}$.

Exemple 2. *Déterminer la dérivée de la fonction* $f(x) = e^{x^2+1}$ *et étudier ses variations.*

Définition 3. *Soit* a *un nombre réel strictement positif, on appelle fonction* exponentielle de base a *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $x \mapsto a^x = e^{x\ln(a)}$.

Propriété 8. *Pour tout nombre réel* a *strictement positif et pour tous réels* x *et* y, *on a :*

1. $\boxed{a^{x+y} = a^x a^y}$
2. $\boxed{a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}}$
3. $\boxed{a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}}$
4. $\boxed{a^{xy} = (a^x)^y}$