Correction du devoir de Mathématiques n°1

Exercice 1

1.

$$3\ln 2 + 2\ln 3 - 2\ln 5 = \ln\left(\frac{2^3\times 3^2}{5^2}\right) = \ln\left(\frac{72}{25}\right)$$

2.

$$\begin{aligned}
\ln(2-x)+3\leqslant 0 &\iff \ln\left((2-x)\times e^3\right)\leqslant 0\\
&\iff (2-x)e^3\leqslant 1 \quad\text{et}\quad 2-x>0\\
&\iff 2-x\leqslant \tfrac{1}{e^3} \quad\text{et}\quad x<2\\
&\iff x\geqslant 2-\tfrac{1}{e^3} \quad\text{et}\quad x<2\\
&\iff 2-\tfrac{1}{e^3}\leqslant x<2\\
&\iff x\in [2-\tfrac{1}{e^3};2[
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. $f(x)$ est défini pour $x-1\neq 0$, l'ensemble de définition de la fonction f est donc $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.
2. Sur les intervalles $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = 1-\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2-3+2(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+1-3+2x-2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-4}{(x-1)^2}$$

3. On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x		-2		1		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2\ln 3-3$	$\searrow$	‖	$\searrow$	5	$\nearrow$

4. On a $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{3}{x-1}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \ln[(x-1)^2]=-\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty$, la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.
5. La courbe représentative de la fonction f est la suivante :