Intégration

1 Rappels sur la dérivation

Théorème 1. *Dérivées des fonctions usuelles*

$f(x)$	*ensemble de définition*	*intervalle(s) de dérivabilité*	$f'(x)$
Cte	$]-\infty;+\infty[$	$]-\infty;+\infty[$	0
$ax+b$	$]-\infty;+\infty[$	$]-\infty;+\infty[$	a
$x^n \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty;+\infty[$	$]-\infty;+\infty[$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ *et* $]0;+\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n} = x^{-n} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ *et* $]0;+\infty[$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$\ln(x)$	$]0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	$]-\infty;+\infty[$	$]-\infty;+\infty[$	e^x

Théorème 2. *Dérivées et opérations*

- *Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors la fonction $u+v : x \mapsto u(x)+v(x)$ est dérivable sur I et* $\boxed{(u+v)' = u' + v'}$.
- *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel alors la fonction $ku : x \mapsto k \times u(x)$ est dérivable sur I et* $\boxed{(ku)' = k \times u'}$.
- *Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors la fonction $uv : x \mapsto u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I et* $\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$.
- *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I ne s'annulant pas sur I alors la fonction $\dfrac{1}{u} : x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$ est dérivable sur I et* $\boxed{\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}}$.
- *Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I avec v ne s'annulant pas sur I alors la fonction $\dfrac{u}{v} : x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et* $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}}$.

Théorème 3. *Dérivée d'une fonction composée*

- *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et ϕ une fonction dérivable sur l'intervalle J alors la fonction composée $\phi(u) : x \mapsto \phi(u(x))$ est dérivable sur l'intervalle I et* $\boxed{(\phi(u))' = u' \times \phi'(u)}$.
- *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction u^n , $n \in \mathbb{N}^* : x \mapsto (u(x))^n$ est dérivable sur l'intervalle I et* $\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$.
- *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs strictement positives sur I, alors la fonction $\sqrt{u} : x \mapsto \sqrt{(u(x)}$ est dérivable sur l'intervalle I et* $\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$.
- *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs strictement positives sur I, alors la fonction $\ln u : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur l'intervalle I et* $\boxed{(\ln u)' = \frac{u'}{u}}$.
- *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $e^u : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur l'intervalle I et* $\boxed{(e^u)' = u'e^u}$.

2 Notion de primitive

Définition 1. *On considère une fonction f définie sur un intervalle I. On dit que la fonction F est une* primitive *de la fonction f sur l'intervalle I si la fonction F est dérivable sur I avec $F' = f$.*

Exemple 1. *La fonction $F(x) = 3x^2 - x + 1$ est une primitive de la fonction $f(x) = 6x - 1$ sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 1. *Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 - x^3 + 5$.*

Théorème 4. *Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I, alors toute primitive de f sur I est de la forme $F + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.*

Exercice 2. *Déterminer toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$.*

Théorème 5. *Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I avec $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, alors il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant la condition initiale $F(x_0) = y_0$.*

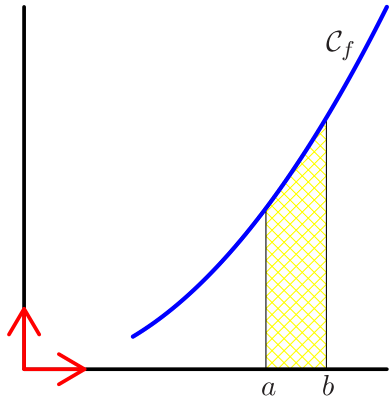
Exercice 3. *Déterminer la primitive F de la fonction $f(x) = x+1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale $F(2) = 1$.*

3 Intégration

Définition 2. *On considère une fonction f admettant une primitive F sur un intervalle I et a et b deux réels de l'intervalle I. On appelle* intégrale de la fonction f *entre a et b :*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

Remarque 1. *L'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie.*



Théorème 6. *Si f est une fonction positive admettant une primitive sur un intervalle I avec a et b deux réels de l'intervalle I vérifiant $a < b$, alors l'intégrale de la fonction f est égale à l'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine délimité par la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, le plan étant muni d'un repère orthogonal.*

Remarque 2. $\displaystyle\int_a^b 0 \,\mathrm{d}x = 0$; $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ *et* $\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Exemple 2. *Calcul de* $\displaystyle\int_2^3 (2x+1)\mathrm{d}x$.

Propriété 1. *Relation de Chasles*
Soit f une fonction admettant une primitive sur un intervalle I et a, b et c trois réels de l'intervalle I, alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$$

Propriété 2. *Linéarité de l'intégrale*
Soient f et g deux fonctions admettant une primitive sur un intervalle I et a et b deux réels de l'intervalle I avect k un nombre réel, alors :

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Propriété 3. *Soient f et g deux fonctions admettant une primitive sur un intervalle I et a et b deux réels de l'intervalle I vérifiant $a \leqslant b$. Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[a;b]$, alors :*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Définition 3. *Soit f une fonction admettant une primitive sur l'intervalle I et a et b deux réels de l'intervalle I vérifiant $a < b$. On appelle* valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ *:*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Exemple 3. *Calcul de la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0;1]$.*