

Correction du devoir maison de Mathématiques n°8

Exercice 1

- La fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ admet la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$ comme primitive sur \mathbb{R} car $F'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1} = f(x)$. On en déduit que $I = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} \ln(2)$.
- La fonction g définie par $g(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$ admet la fonction G définie par $G(x) = -\frac{1}{2(x^2+1)}$ comme primitive sur \mathbb{R} car $G'(x) = \frac{4x}{4(x^2+1)^2} = g(x)$. On en déduit que $J = G(1) - G(0) = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Exercice 2

1. (a) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$ avec $f'(x) = -8x + 8 = 8(1-x) \geq 0$ donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1; 5]$ avec $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \leq 0$ donc la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1; 5]$.

On en déduit le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1; 5]$:

x	0	1	5
$f(x)$	0	4	$\ln 5$

- (b) La courbe (\mathcal{C}) est la suivante :



2. (a) Une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$ est la fonction F définie par $F(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 4x^2$.

- (b) On a $G'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x = g(x)$, la fonction G est donc une primitive de g sur l'intervalle $[1; 5]$.

- (c) D'après la question précédente, la fonction f admet pour primitive sur l'intervalle $[1; 5]$ la fonction H définie par $H(x) = x \ln x - x - \frac{x^2}{2} + 5x = x \ln x - \frac{x^2}{2} + 4x$.

On en déduit le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes (environ 15 milliers) :

$$\int_0^5 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx = F(1) - F(0) + H(5) - H(1) = \frac{8}{3} - 0 + 5 \ln 5 + \frac{15}{2} - \frac{7}{2} = \frac{20}{3} + 5 \ln 5$$

3. L'unité d'aire vaut 4 cm^2 . L'aire, exprimée en cm^2 , du domaine plan limité par la courbe (\mathcal{C}) , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$ vaut donc $4 \times \int_1^5 f(x) dx = 20 \ln 5 + 16 \simeq 48 \text{ cm}^2$.