Correction du devoir maison de Mathématiques n°8

Exercice 1

- La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ admet la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$ comme primitive sur $\mathbb{R}$ car $F'(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{x^2+1} = f(x)$. On en déduit que $I = F(1) - F(0) = \dfrac{1}{2}\ln(2)$.
- La fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ admet la fonction G définie par $G(x) = -\dfrac{1}{2(x^2+1)}$ comme primitive sur $\mathbb{R}$ car $G'(x) = \dfrac{4x}{4(x^2+1)^2} = g(x)$. On en déduit que $J = G(1) - G(0) = -\dfrac{1}{4} - \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 2

1. (a) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;1]$ avec $f'(x) = -8x + 8 = 8(1-x) \geqslant 0$ donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;1]$.
   La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1;5]$ avec $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x} \leqslant 0$ donc la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1;5]$.
   On en déduit le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1;5]$:

x	0		1		5
$f(x)$			4		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				$\ln 5$

   (b) La courbe $(\mathcal{C})$ est la suivante :

2. (a) Une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$ est la fonction F définie par $F(x) = -\dfrac{4}{3}x^3 + 4x^2$.
   (b) On a $G'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x = g(x)$, la fonction G est donc une primitive de g sur l'intervalle $[1;5]$.
   (c) D'après la question précédente, la fonction f admet pour primitive sur l'intervalle $[1;5]$ la fonction H définie par $H(x) = x\ln x - x - \dfrac{x^2}{2} + 5x = x\ln x - \dfrac{x^2}{2} + 4x$.
   On en déduit le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes (environ 15 milliers) :
   $$\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^5 f(x)\mathrm{d}x = F(1) - F(0) + H(5) - H(1) = \frac{8}{3} - 0 + 5\ln 5 + \frac{15}{2} - \frac{7}{2} = \frac{20}{3} + 5\ln 5$$
3. L'unité d'aire vaut 4 cm^2. L'aire, exprimée en cm^2, du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$ vaut donc $4 \times \displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 20\ln 5 + 16 \simeq 48\text{cm}^2$.