Devoir commun de Mathématiques n°4

le 11 mai 2010
durée : 2h00

NOM :

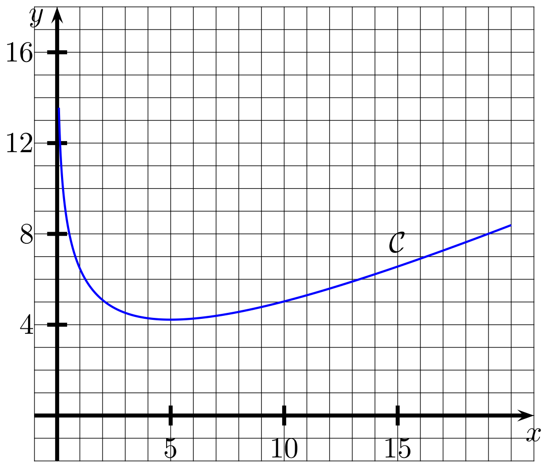
PRÉNOM :

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 20]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 4 + \frac{3}{4}\ln(4x+10) - 3\ln x.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe ci-dessous représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.



Partie A

1. Déterminer la limite de f en 0. Quelle interprétation graphique peut-on en donner ?
2. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0\ ;\ 20]$:
$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 15}{x(2x+5)}$.
3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ 20]$ et dresser son tableau de variations.

On admet que l'équation $f(x) = 6$ possède exactement deux solutions α et β dans l'intervalle $]0\ ;\ 20]$ telles que $\alpha \approx 1,242$ et $\beta \approx 13,311$.

Partie B

Une entreprise produit au maximum 20 000 objets par jour.

On note x le nombre de milliers d'objets produits chaque jour travaillé : $x \in]0\ ;\ 20]$.

On admet que le coût moyen de fabrication, exprimé en euros, d'un objet est égal à $f(x)$, où f est la fonction définie ci-dessus.

1. (a) Pour combien d'objets produits le coût moyen de fabrication est-il minimal ?
   (b) Déterminer ce coût moyen minimal, arrondi au centime.
2. Le prix de vente d'un objet est de 6€. Pour quelles productions journalières l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?
3. Déterminer le bénéfice journalier, arrondi à la centaine d'euros, pour une production de 5 000 objets par jour.
4. L'année suivante, le coût moyen augmente de 2 %. Le prix de vente est alors augmenté de 2 %. Le bénéfice journalier reste-t-il identique ? Justifier. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

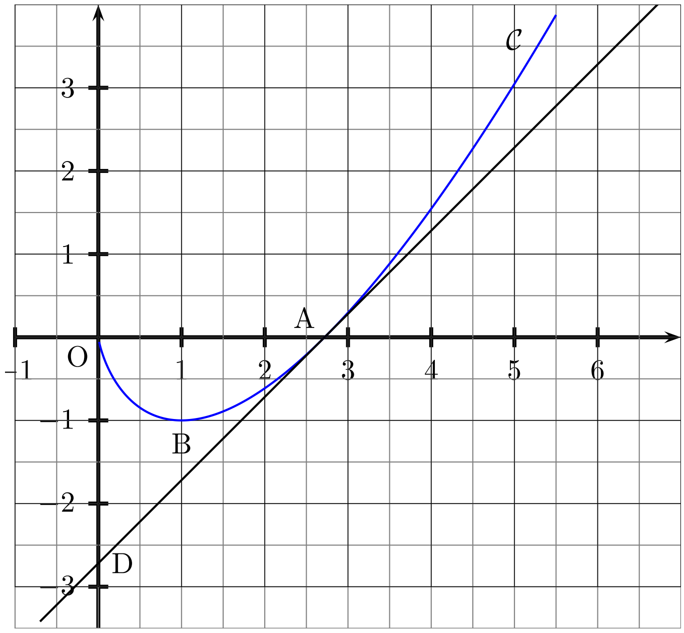
Exercice 2

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes

Partie A. Lectures graphiques

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de f.
La courbe $\mathcal{C}$ passe par les points $\mathrm{A}(\mathrm{e}\,;\,0)$ et $\mathrm{B}(1\,;\,-1)$.

La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 et la tangente au point d'abscisse e passe par le point $\mathrm{D}(0\,;\,-\mathrm{e})$.



1. Déterminer une équation de la droite (AD).
2. Par lectures graphiques *(aucune justification n'est exigée)* :
   (a) Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
   (b) Dresser le tableau de signes de f sur $]0\,;\,5]$.
   (c) Dresser le tableau de signes de f' sur $]0\,;\,5]$.
   (d) Soit F une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$. Déterminer les variations de F sur $]0\,;5]$.
   (e) Encadrer par deux entiers consécutifs l'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = 4$ et $x = 5$.

Partie B. Étude de la fonction

La courbe $\mathcal{C}$ de la partie A est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x(\ln x - 1).$$

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = x\ln x$. On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.
   Déterminer la limite de f en 0.
2. (a) Montrer que, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) = \ln x$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. (a) Démontrer que la fonction H définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par
   $H(x) = \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{1}{4}x^2$ est une primitive sur $]0\,;\,+\infty[$ de la fonction h définie à la question 1. b.
   (b) En déduire une primitive F de f et calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (c) En déduire l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$. On arrondira le résultat au dixième.