

# Devoir commun de Mathématiques n°4

le 11 mai 2010

durée : 2h00

NOM :

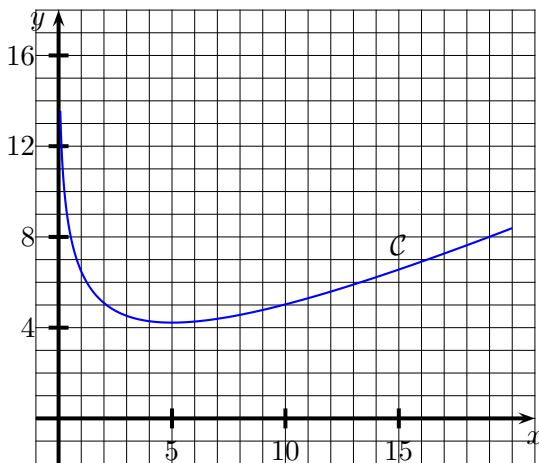
PRÉNOM :

## Exercice 1

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; 20]$  par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 4 + \frac{3}{4}\ln(4x + 10) - 3\ln x.$$

On appelle  $\mathcal{C}$  la courbe ci-dessous représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthogonal.



### Partie A

- Déterminer la limite de  $f$  en 0. Quelle interprétation graphique peut-on en donner ?
- Montrer que pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0 ; 20]$  :
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x(2x + 5)}.$$
- Déterminer les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; 20]$  et dresser son tableau de variations.

On admet que l'équation  $f(x) = 6$  possède exactement deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$  dans l'intervalle  $]0 ; 20]$  telles que  $\alpha \approx 1,242$  et  $\beta \approx 13,311$ .

### Partie B

Une entreprise produit au maximum 20 000 objets par jour.

On note  $x$  le nombre de milliers d'objets produits chaque jour travaillé :  $x \in ]0 ; 20]$ .

On admet que le coût moyen de fabrication, exprimé en euros, d'un objet est égal à  $f(x)$ , où  $f$  est la fonction définie ci-dessus.

- (a) Pour combien d'objets produits le coût moyen de fabrication est-il minimal ?  
(b) Déterminer ce coût moyen minimal, arrondi au centime.
- Le prix de vente d'un objet est de 6€. Pour quelles productions journalières l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?
- Déterminer le bénéfice journalier, arrondi à la centaine d'euros, pour une production de 5 000 objets par jour.
- L'année suivante, le coût moyen augmente de 2%. Le prix de vente est alors augmenté de 2%. Le bénéfice journalier reste-t-il identique ? Justifier. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

## Exercice 2

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes

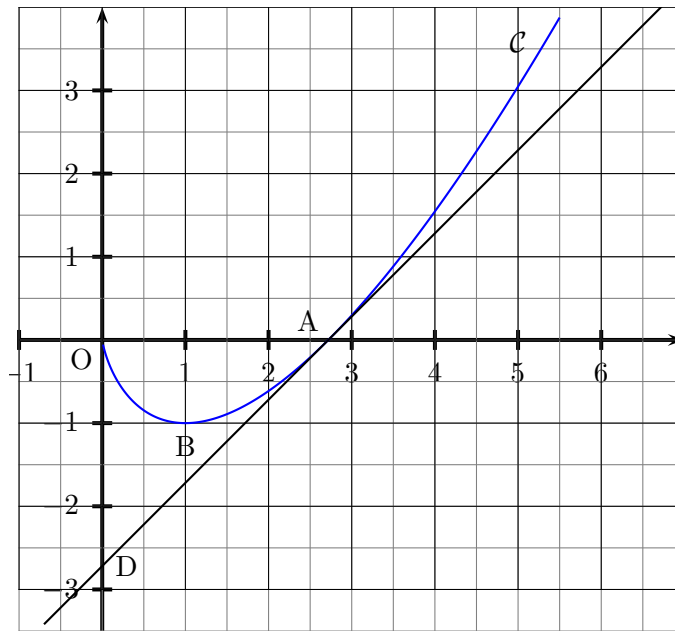
### Partie A. Lectures graphiques

La courbe  $\mathcal{C}$  ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

La courbe  $\mathcal{C}$  passe par les points  $A(e; 0)$  et  $B(1; -1)$ .

La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 et la tangente au point d'abscisse  $e$  passe par le point  $D(0; -e)$ .



- Déterminer une équation de la droite (AD).
- Par lectures graphiques (*aucune justification n'est exigée*) :
  - Déterminer  $f(1)$  et  $f'(1)$ .
  - Dresser le tableau de signes de  $f$  sur  $]0; 5]$ .
  - Dresser le tableau de signes de  $f'$  sur  $]0; 5]$ .
  - Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ . Déterminer les variations de  $F$  sur  $]0; 5]$ .
  - Encadrer par deux entiers consécutifs l'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}$  et les droites d'équation  $x = 4$  et  $x = 5$ .

### Partie B. Étude de la fonction

La courbe  $\mathcal{C}$  de la partie A est la représentation graphique de la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = x(\ln x - 1).$$

- Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - Soit  $h$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $h(x) = x \ln x$ . On rappelle que  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ .  
Déterminer la limite de  $f$  en 0.
- Montrer que, pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ , on a :  $f'(x) = \ln x$ .
  - Étudier le signe de  $f'(x)$  sur  $]0; +\infty[$  et en déduire le tableau de variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
- Démontrer que la fonction  $H$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $H(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2$  est une primitive sur  $]0; +\infty[$  de la fonction  $h$  définie à la question 1. b.
  - En déduire une primitive  $F$  de  $f$  et calculer  $\int_1^e f(x) dx$ .
  - En déduire l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = e$ . On arrondira le résultat au dixième.