Baccalauréat Blanc de Mathématiques
Série économique et sociale (ES)
Lycée Gabriel Touchard - mars 2010

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient 5 (enseignement obligatoire)
Coefficient 7 (enseignement de spécialité)

L'usage des calculatrices est autorisé.

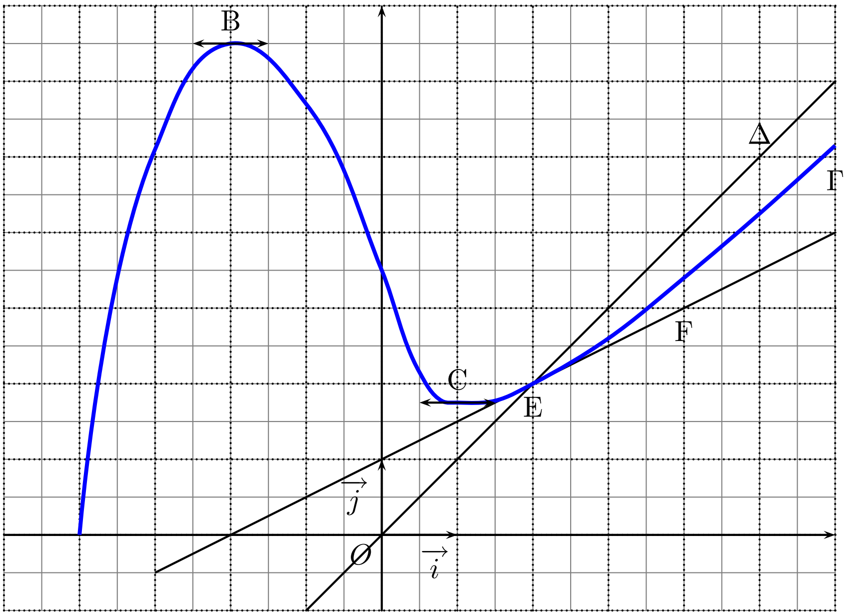
Le sujet comporte quatre exercices indépendants les uns des autres. Les trois premiers exercices sont communs à tous les candidats, l'exercice 4 diffère selon l'enseignement choisi (obligatoire ou de spécialité).

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 points)

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 6]$. On note f' sa fonction dérivée.
La courbe Γ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal est tracée ci-dessous ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$. La courbe Γ et la droite Δ se coupent au point E d'abscisse 2. On sait par ailleurs que :

– la courbe Γ admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses aux points $\mathrm{B}(-2\ ;\ 6,5)$ et C(1 ; 1,75),
– la droite (EF) est la tangente à la courbe Γ au point E ; F est le point de coordonnées (4 ; 3).



1. Dans cette question, déterminer par lecture graphique et sans justification :
   (a) les valeurs de $f'(-2)$ et $f'(2)$;
   (b) les valeurs de x dans l'intervalle [-4 ; 6] vérifiant $f'(x) \geqslant 0$;
   (c) les valeurs de x dans l'intervalle [-4 ; 6] vérifiant $f(x) \leqslant x$.
2. Soit g la fonction définie sur]-4 ; 6] par $g(x) = \ln[f(x)]$. Déterminer par lecture graphique et avec justification :
   (a) les variations de g ;
   (b) la limite de la fonction g quand x tend vers -4.

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 2x(1 - \ln x).$$

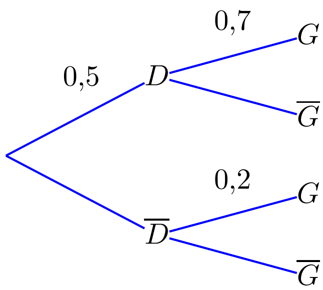
1. (a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 0 (on rappelle que la limite en 0 de la fonction u définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $u(x) = x\ln x$ est 0).
   (b) Déterminer $f'(x)$ pour $x \in]0\ ;\ +\infty[$ (où f' est la fonction dérivée de f).
   (c) Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0\ ;\ +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. (a) Résoudre sur $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$.
   (b) Résoudre, par un calcul, l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Montrer que la dérivée de la fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = x^2\left(\dfrac{3}{2} - \ln x\right)$ est la fonction f. En déduire les variations de la fonction F.

Exercice 3 (5 points)

Une salle de jeu comporte deux consoles identiques proposant le même jeu.
Un jour, l'une des deux est déréglée.
Les joueurs ne peuvent pas savoir laquelle des deux est déréglée.

1. Ce jour-là, un joueur choisit au hasard l'une des deux consoles et il joue une partie sur cette console.
   On note :
   D l'événement « le joueur choisit la console déréglée » et $\overline{D}$ l'événement contraire ;
   G l'événement « le joueur gagne la partie » et $\overline{G}$ l'événement contraire.

   Cette situation aléatoire est modélisée par l'arbre incomplet suivant, dans lequel figurent certaines probabilités.

   Ainsi, $0,7$ est la probabilité que le joueur gagne sachant qu'il a choisi une console déréglée.

   (a) Reproduire cet arbre sur la copie et le compléter.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement « le joueur choisit la console déréglée et il gagne ».
   (c) Calculer la probabilité de l'événement « le joueur choisit la console non déréglée et il gagne ».
   (d) Montrer que la probabilité que le joueur gagne est égale à $0,45$.
   (e) Calculer la probabilité que le joueur ait choisi la console déréglée sachant qu'il a gagné.

2. Trois fois successivement et de façon indépendante, un joueur choisit au hasard l'une des deux consoles et joue une partie.
   Calculer la probabilité de l'événement « le joueur gagne exactement deux fois ». Le résultat sera donné sous forme décimale arrondie au millième.

Exercice 4 (Enseignement obligatoire) (6 points)

1. On considère la fonction $g(x) = 20x^3 - 3x^2 - 10$.
   (a) Étudier les variations de la fonction g.
   (b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique racine réelle α et en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.
   (c) Construire le tableau de signes de la fonction g.

2. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1 - 10x}{1 + x^3}$ et on appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.
   (a) Donner l'ensemble de définition de la fonction f et étudier ses limites aux bornes de cet ensemble. En déduire les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$.
   (b) Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est dérivable puis calculer sa dérivée.
   (c) Construire le tableau de variations de la fonction f.
   (d) Sur une feuille de papier millimétré construire un repère orthonormé (unité 1 cm) puis tracer $\mathcal{C}_f$ en faisant apparaître ses asymptotes ainsi que sa tangente horizontale.

Exercice 4 (Enseignement de spécialité) (6 points)

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8.$$

1. Sur une feuille de papier millimétré construire un repère orthonormé (unité 1 cm), où l'axe des ordonnées est placé à gauche de la feuille.
   (a) Dans ce repère, tracer les droites d'équations respectives $y = 0,85x + 1,8$ et $y = x$.
   (b) Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses puis, en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1, u_2 et u_3. On laissera apparents les traits de construction.
   (c) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n).
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 12$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 12 - 4 \times 0,85^n$.
   (c) Donner le sens de variation de la suite (v_n). En déduire celui de la suite (u_n).
   (d) Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. Un magazine est vendu uniquement par abonnement. On a constaté que :
   – il y a 1 800 nouveaux abonnés chaque année ;
   – d'une année sur l'autre, 15 % des abonnés ne se réabonnent pas.
   En 2008, il y avait 8 000 abonnés.
   (a) Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'abonnés en $(2008 + n)$.
   (b) En utilisant la question 2. b., calculer une estimation du nombre d'abonnés en 2014.