

Correction du Baccalauréat Blanc de Mathématiques
Série économique et sociale (ES)
Lycée Gabriel Touchard - mars 2010

Exercice 1

1. (a) On a $f'(-2) = 0$ et $f'(2) = \frac{1}{2}$.
 (b) On a $f'(x) \geq 0 \iff x \in [-4; -2] \cup [1; 6]$.
 (c) On a $f(x) \leq x \iff x \in [2; 6]$.
2. (a) La fonction g est dérivable sur l'intervalle $] - 4; 6]$ et $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, le signe de $g'(x)$ est le signe de $f'(x)$ car la fonction f est positive, on en déduit les variations de la fonction g :

x	-4		-2		1	6
$g(x)$			$\ln(13) - \ln(2)$			
		↗		↘		↗
					$\ln(7) - 2\ln(2)$	

- (b) On a $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -4} g(x) = \lim_{x \rightarrow -4} \ln[f(x)] = -\infty$.

Exercice 2

1. (a) On a $f(x) = 2x - 2x \ln x$ or $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
 (b) On a $f'(x) = 2 \times (1 - \ln x) + 2x \times \left(-\frac{1}{x}\right) = 2 - 2 \ln x - 2 = -2 \ln x$.
 (c) On en déduit le signe de f' et le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$:

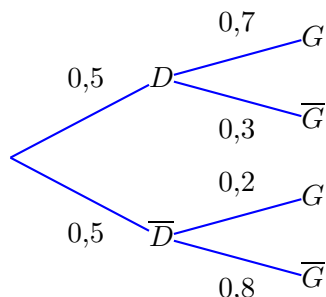
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$			+	0	-
$f(x)$			\nearrow	\searrow	
		0			$-\infty$

2. (a) Sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f(x) = 0$ équivaut à $1 - \ln x = 0$ soit $x = e$.
 (b) Sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f(x) \geq 0$ équivaut à $1 - \ln x \geq 0$ soit $\ln x \leq 1$ soit $x \in]0; e]$.
 (c) On a $F'(x) = 2x \times \left(\frac{3}{2} - \ln x\right) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = 3x - 2x \ln x - x = 2x - 2x \ln x = f(x)$. On en déduit les variations de la fonction F :

x	0		e		$+\infty$
$f(x)$			+	0	-
$F(x)$			\nearrow	\searrow	
		0			$-\infty$

Exercice 3

1. (a) L'arbre complet est le suivant :



- (b) On a $P(D \cap G) = P(D) \times P_D(G) = 0,5 \times 0,7 = 0,35$.
 (c) On a $P(\bar{D} \cap G) = P(\bar{D}) \times P_{\bar{D}}(G) = 0,5 \times 0,2 = 0,1$.
 (d) D'après la formule des probabilités totales, on a $P(G) = P(D \cap G) + P(\bar{D} \cap G) = 0,35 + 0,1 = 0,45$.
 (e) On a $P_G(D) = \frac{P(D \cap G)}{P(G)} = \frac{0,35}{0,45} = \frac{7}{9}$.

2. Le joueur perd exactement une fois, soit au premier au second ou au dernier tirage et gagne aux deux autres. Les tirages étant indépendants, la probabilité cherchée vaut $0,55 \times 0,45 \times 0,45 + 0,45 \times 0,55 \times 0,45 + 0,45 \times 0,45 \times 0,55 = 0,334125 \simeq 0,334$.

Exercice 4 (Enseignement obligatoire)

1. (a) La fonction g est un polynôme, elle est donc dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = 60x^2 - 6x = 6x(10x - 1)$.
 On en déduit les variations de la fonction g :

x	0	0,1			
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	-10		-10,01		
	↗		↘		↗

- (b) Sur l'intervalle $] -\infty; 0,1[$, on a $g(x) \leq -10$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution. Sur l'intervalle $[0, 1; +\infty[$, la fonction g est continue et strictement croissante avec $g(0,1) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ donc d'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet une unique racine réelle α . La calculatrice donne $\alpha \simeq 0,8$.
 (c) On en déduit le tableau de signes de la fonction g :

x	α
$g(x)$	- 0 +

2. (a) La fonction f est une fonction rationnelle définie sur $] -\infty; -1[\cup] -1; +\infty[$.
 La limite d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$ est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-10}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-10}{x^2} = 0$. La droite d'équation $y = 0$ est donc une asymptote horizontale à la courbe \mathcal{C}_f en $-\infty$ et $+\infty$.
 On a $\lim_{x \rightarrow -1^-} (1 - 10x) = 11$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} (1 + x^3) = 0_-$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} (1 + x^3) = 0_+$ donc $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$. La droite d'équation $x = -1$ est donc une asymptote verticale à la courbe \mathcal{C}_f à gauche et à droite.

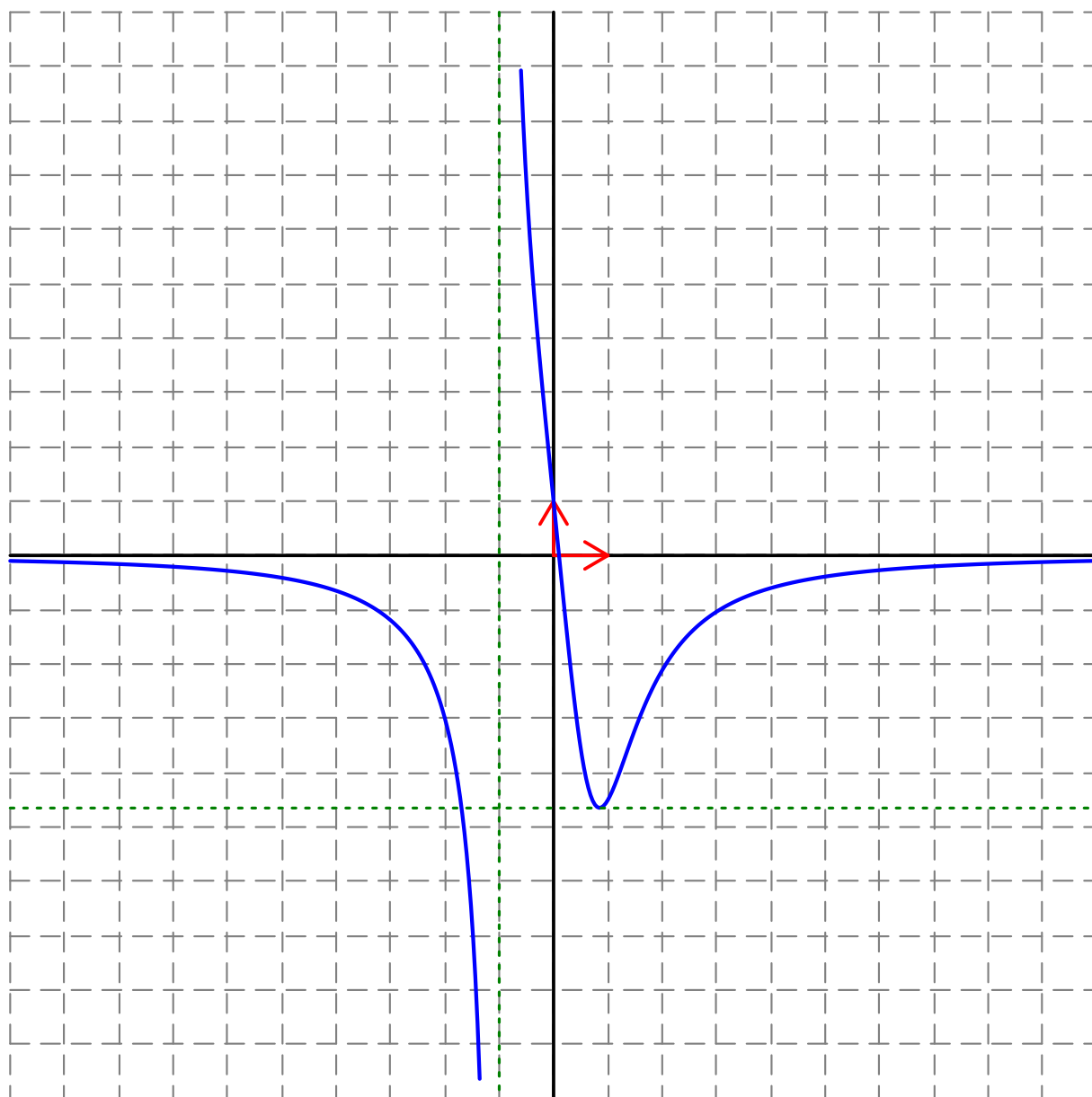
(b) La fonction f est rationnelle donc dérivable sur les intervalles $] -\infty; -1[$ et $] -1; +\infty[$ avec :

$$f'(x) = \frac{-10 \times (1 + x^3) - (1 - 10x) \times 3x^2}{(1 + x^3)^2} = \frac{-10 - 10x^3 - 3x^2 + 30x^3}{(1 + x^3)^2} = \frac{20x^3 - 3x^2 - 10}{(1 + x^3)^2} = \frac{g(x)}{(1 + x^3)^2}$$

(c) On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

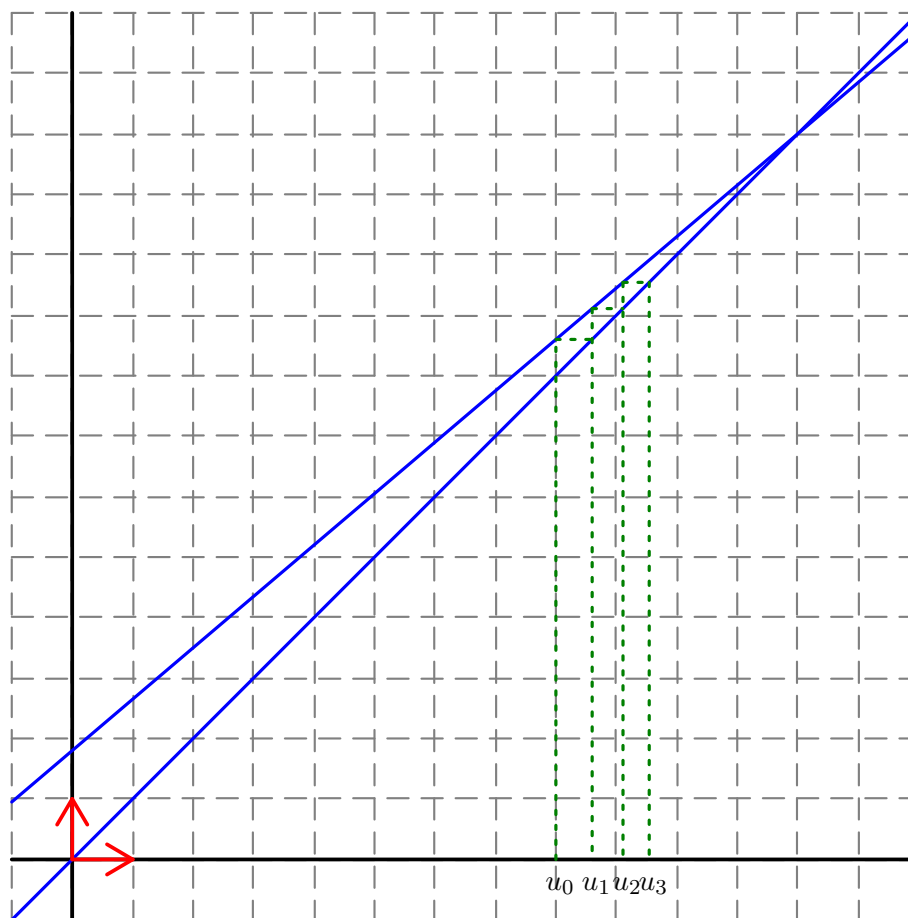
x	$-\infty$	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$ $	$-$ 0 $+$	
$f(x)$	0	$ $	$+\infty$ \searrow $f(\alpha)$ \nearrow 0	

(d) La courbe représentative de la fonction f est la suivante :



Exercice 4 (Enseignement de spécialité)

1. On conjecture $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 12$.



2. (a) On a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = 0,85u_n + 1,8 - 12 = 0,85u_n - 10,2 = 0,85(u_n - 12) = 0,85v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $0,85$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 12 = 8 - 12 = -4$.

- (b) Pour tout entier naturel n , $v_n = v_0 \times 0,85^n = -4 \times 0,85^n$. On en déduit $u_n = v_n + 12 = 12 - 4 \times 0,85^n$.
- (c) La suite v_n est une suite géométrique de premier terme négatif et de raison positive inférieure à 1 , elle est donc croissante. On a $u_n = v_n + 12$ donc la suite (u_n) est également croissante.
- (d) La raison de la suite (v_n) est positive et strictement inférieure à 1 donc elle converge vers 0 , la suite (u_n) converge donc vers $0 + 12 = 12$.
3. (a) En 2008, il y avait $8\,000$ abonnés donc $u_0 = 8$. Chaque année, il y a $1,8$ milliers d'abonnés supplémentaires et 85% des anciens abonnés donc $u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8$.
- (b) En 2014, on prévoit $u_6 = 12 - 4 \times 0,85^6 \simeq 10,5$ milliers d'abonnés.