Correction du Baccalauréat Blanc de Mathématiques
Série économique et sociale (ES)
Lycée Gabriel Touchard - mars 2010

Exercice 1

1. (a) On a $f'(-2) = 0$ et $f'(2) = \dfrac{1}{2}$.

   (b) On a $f'(x) \geqslant 0 \iff x \in [-4; -2] \cup [1; 6]$.

   (c) On a $f(x) \leqslant x \iff x \in [2; 6]$.

2. (a) La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]-4; 6]$ et $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, le signe de $g'(x)$ est le signe de $f'(x)$ car la fonction f est positive, on en déduit les variations de la fonction g :

x	-4		-2		1		6
$g(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	$\ln(13) - \ln(2)$	$\searrow$	$\ln(7) - 2\ln(2)$	$\nearrow$	

   (b) On a $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \ln(X) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -4} g(x) = \lim\limits_{x \to -4} \ln[f(x)] = -\infty$.

Exercice 2

1. (a) On a $f(x) = 2x - 2x \ln x$ or $\lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

   (b) On a $f'(x) = 2 \times (1 - \ln x) + 2x \times \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 2 - 2\ln x - 2 = -2\ln x$.

   (c) On en déduit le signe de f' et le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ 0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

2. (a) Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) = 0$ équivaut à $1 - \ln x = 0$ soit $x = e$.

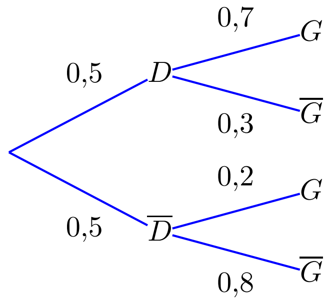
   (b) Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$ équivaut à $1 - \ln x \geqslant 0$ soit $\ln x \leqslant 1$ soit $x \in]0; e]$.

   (c) On a $F'(x) = 2x \times \left(\dfrac{3}{2} - \ln x\right) + x^2 \times \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 3x - 2x\ln x - x = 2x - 2x\ln x = f(x)$. On en déduit les variations de la fonction F :

x	0		e		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$F(x)$	$\Vert$ 0	$\nearrow$	$\frac{e^2}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 3

1. (a) L'arbre complet est le suivant :



   (b) On a $P(D \cap G) = P(D) \times P_D(G) = 0,5 \times 0,7 = 0,35$.

   (c) On a $P(\overline{D} \cap G) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(G) = 0,5 \times 0,2 = 0,1$.

   (d) D'après la formule des probabilités totales, on a $P(G) = P(D \cap G) + P(\overline{D} \cap G) = 0,35 + 0,1 = 0,45$.

   (e) On a $P_G(D) = \dfrac{P(D \cap G)}{P(G)} = \dfrac{0,35}{0,45} = \dfrac{7}{9}$.

2. Le joueur perd exactement une fois, soit au premier au second ou au dernier tirage et gagne aux deux autres. Les tirages étant indépendants, la probabilité cherchée vaut $0,55 \times 0,45 \times 0,45 + 0,45 \times 0,55 \times 0,45 + 0,45 \times 0,45 \times 0,55 = 0,334125 \simeq 0,334$.

Exercice 4 (Enseignement obligatoire)

1. (a) La fonction g est un polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 60x^2 - 6x = 6x(10x - 1)$. On en déduit les variations de la fonction g :

x		0		$0,1$	
$g'x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
		-10			
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
				$-10,01$	

   (b) Sur l'intervalle $]-\infty; 0,1[$, on a $g(x) \leqslant -10$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution. Sur l'intervalle $[0,1; +\infty[$, la fonction g est continue et strictement croissante avec $g(0,1) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ donc d'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet une unique racine réelle α. La calculatrice donne $\alpha \simeq 0,8$.

   (c) On en déduit le tableau de signes de la fonction g :

x		α	
$g(x)$	$-$	0	$+$

2. (a) La fonction f est une fonction rationnelle définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.
   La limite d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$ est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-10}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-10}{x^2} = 0$. La droite d'équation $y = 0$ est donc une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.
   On a $\lim\limits_{x \to -1} (1 - 10x) = 11$, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (1 + x^3) = 0_-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (1 + x^3) = 0_+$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$. La droite d'équation $x = -1$ est donc une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$ à gauche et à droite.

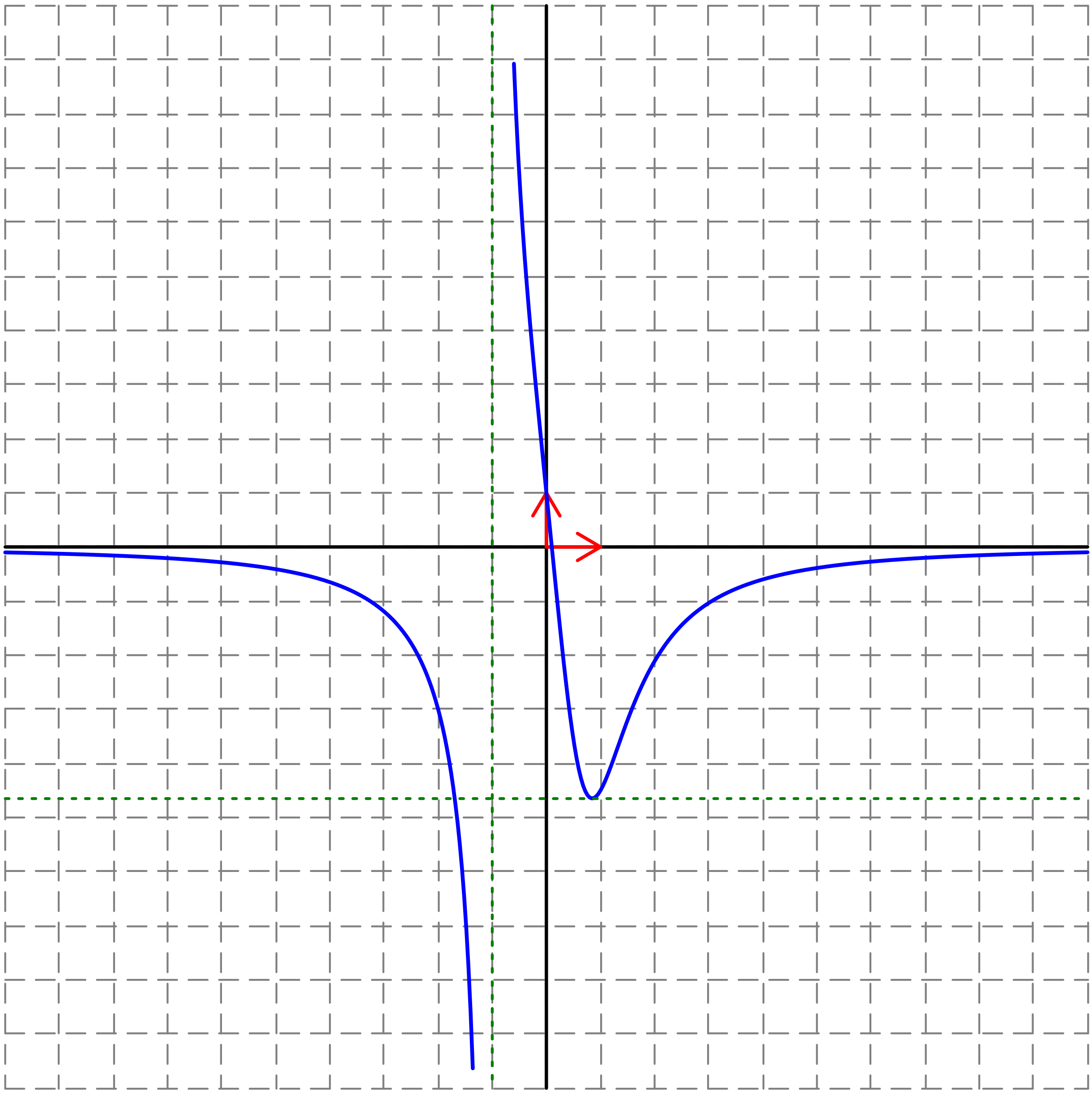
(b) La fonction f est rationnelle donc dérivable sur les intervalles $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$ avec :

$$f'(x) = \frac{-10 \times (1+x^3) - (1-10x) \times 3x^2}{(1+x^3)^2} = \frac{-10-10x^3-3x^2+30x^3}{(1+x^3)^2} = \frac{20x^3-3x^2-10}{(1+x^3)^2} = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$$

(c) On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

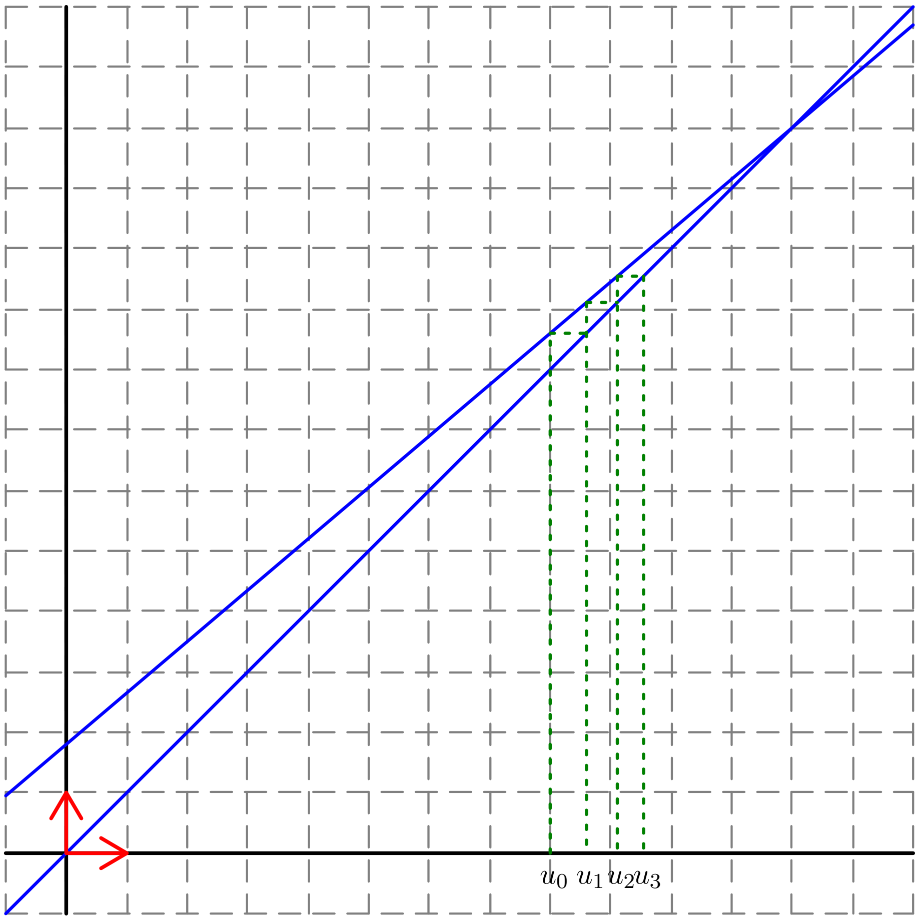
x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

(d) La courbe repésentative de la fonction f est la suivante :



Exercice 4 (Enseignement de spécialité)

1. On conjecture $\lim_{n \to +\infty} u_n = 12$.



2. (a) On a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = 0,85u_n + 1,8 - 12 = 0,85u_n - 10,2 = 0,85(u_n - 12) = 0,85v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $0,85$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 12 = 8 - 12 = -4$.

(b) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times 0,85^n = -4 \times 0,85^n$. On en déduit $u_n = v_n + 12 = 12 - 4 \times 0,85^n$.

(c) La suite v_n est une suite géométrique de premier terme négatif et de raison positive inférieure à 1, elle est donc croissante. On a $u_n = v_n + 12$ donc la suite (u_n) est également croissante.

(d) La raison de la suite (v_n) est positive et strictement inférieure à 1 donc elle converge vers 0, la suite (u_n) converge donc vers $0 + 12 = 12$.

3. (a) En 2008, il y avait 8 000 abonnés donc $u_0 = 8$. Chaque année, il y a 1,8 milliers d'abonnés supplémentaires et 85% des anciens abonnés donc $u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8$.

(b) En 2014, on prévoit $u_6 = 12 - 4 \times 0,85^6 \simeq 10,5$ milliers d'abonnés.