

Devoir de Mathématiques n°5

Problème

Une entreprise de menuiserie produit et vend des tables. L'objectif de ce problème est de comparer les recettes et les coûts provoqués par cette activité. On note x le nombre de tables fabriquées chaque semaine, x étant un nombre entier compris entre 3 et 12. Le coût total de production de ces x tables, exprimé en centaines d'euros, est donné par :

$$C_T(x) = 0,25x^2 + x + 20,25$$

Partie A - Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[3; 12]$ par :

$$f(x) = 0,25x^2 + x + 20,25$$

Pour tout entier x de l'intervalle $[3; 12]$, on a : $C_T(x) = f(x)$.

- Calculer $f'(x)$, où f' désigne la dérivée de la fonction f . Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[3; 12]$.
- Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$							49,5			

- Tracer le représentation graphique \mathcal{C} de la fonction f dans un repère orthogonal avec pour unités en abscisses 1cm pour 1 et en ordonnées 1cm pour 5.

Partie B - Recherche d'un prix de vente

Toutes les tables fabriquées sont vendues et l'entreprise doit fixer le prix de son produit. On note $R(x)$ la recette, en centaines d'euros, occasionnée par la vente de x tables.

- La première proposition est un prix de 550 euros par table.
 - Calculer $R(10)$ dans ce cas.
 - Donner l'expression de $R(x)$ en fonction de x .
 - À l'aide de la question 2 de la partie A, expliquer pourquoi ce prix de vente ne peut pas convenir sur le plan commercial.
- La seconde proposition est un prix unitaire de 630 euros.
 - Calculer $R(x)$ dans ce cas.
 - Représenter sur le graphique précédent la droite \mathcal{D} d'équation $y = 6,3x$.
 - En déduire graphiquement, en justifiant la réponse, les valeurs entières de x appartenant à l'intervalle $[3; 12]$ pour lesquelles la recette sera strictement supérieure au coût total.
- On se propose de déterminer le nombre de tables fabriquées et vendues pour avoir un bénéfice maximum.
 - Montrer que l'expression du bénéfice est :

$$B(x) = -0,25x^2 + 5,3x - 20,25$$

- Calculer $B'(x)$ où B' désigne la dérivée de la fonction B . En déduire les variations de la fonction B sur l'intervalle $[5; 12]$ en précisant les valeurs extrêmes de $B(x)$.
- En déduire la valeur de x qui procure un bénéfice maximum. On pourra calculer $B(10)$ et $B(11)$.