Fonctions convexes

Définition. *On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est* convexe *resp.* concave *sur I si pour tout $x, y \in I$ on a :*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad \textit{resp.} \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Étude d'exemples

1. Prouver que la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Prouver que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et concave sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. Prouver que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.

Propriété fondamentale

Le but de cette partie est de prouver la propriété suivante :

Propriété. *Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) > 0$ alors la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.*

On considère un réel donné y et on définit la fonction auxiliaire :

$$g(x) = \frac{f(x)+f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

1. Prouver que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Prouver que f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, en déduire que :
   si $x < y$ alors $g'(x) > 0$,
   si $x > y$ alors $g'(x) < 0$.
3. En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et prouver que $g(x) \geqslant 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4. Conclure.

Application

On admet que la propriété ci-dessus peut se généraliser au cas d'un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$.

Prouver que pour tout $x, y \in [0;\pi]$, on a :

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{\sin(x)+\sin(y)}{2}$$

On pourra étudier la fonction $x \mapsto -\sin(x)$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.