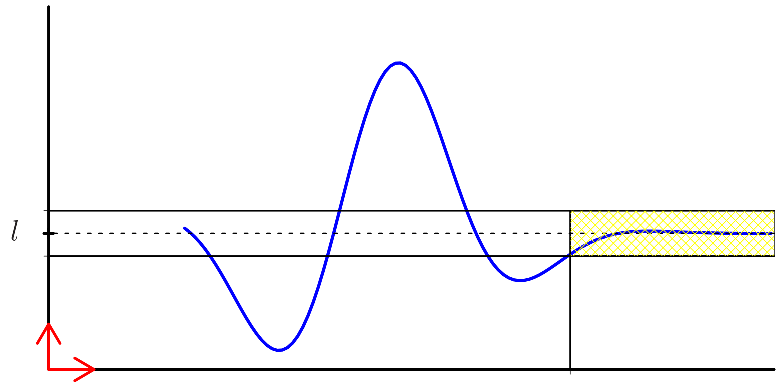
Limites et continuité

1 Limite d'une fonction

1.1 Limite d'une fonction en $+\infty$

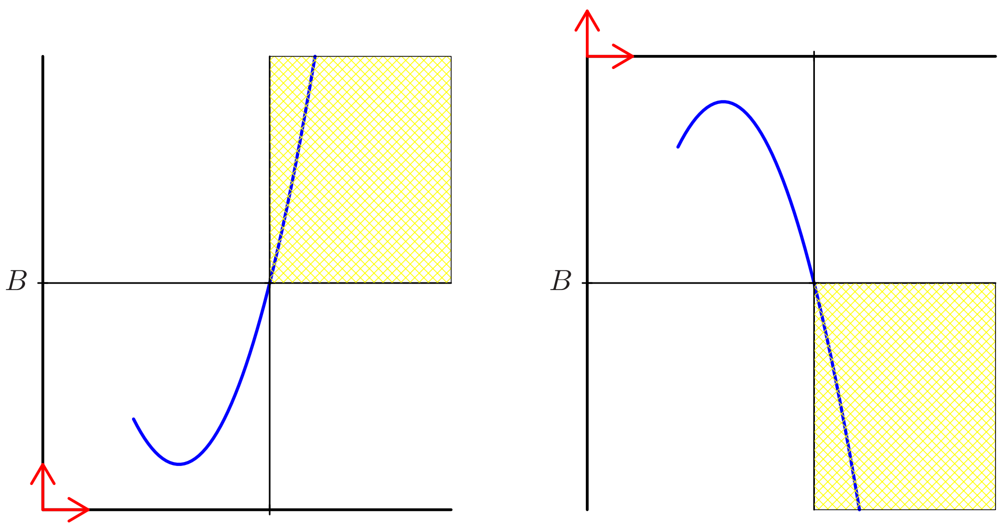
Définition 1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A;+\infty[$. On dit que la fonction f admet pour limite le nombre l en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.*



La droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$.

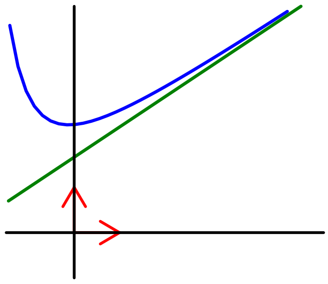
Exemple 1. *limites de $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x^2}$ pour $x \to +\infty$.*

Définition 2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A;+\infty[$. On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]B;+\infty[$ (resp. $]-\infty;B[$) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$).*



Exemple 2. *limites de $\sqrt{x}$ et x^2 pour $x \to +\infty$.*

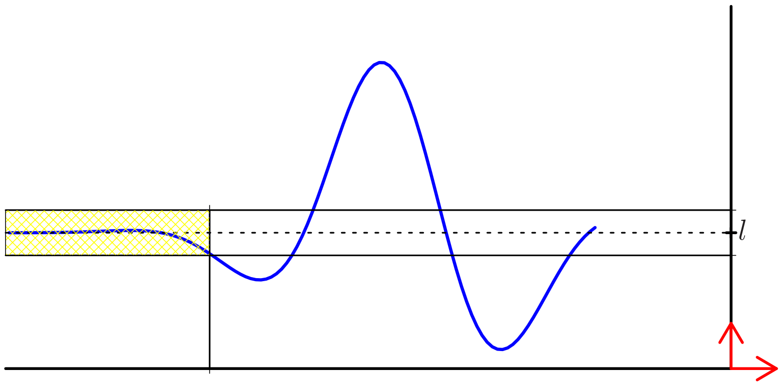
Définition 3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A; +\infty[$. On dit que la droite d'équation $y = mx+p$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$ si* $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (mx + p)] = 0$.



Exemple 3. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 4}{x - 1}$.

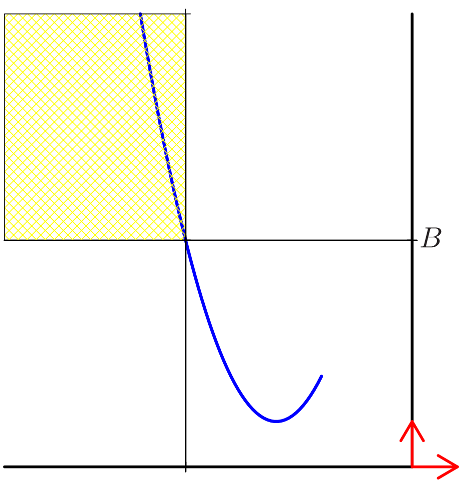
1.2 Limite d'une fonction en $-\infty$

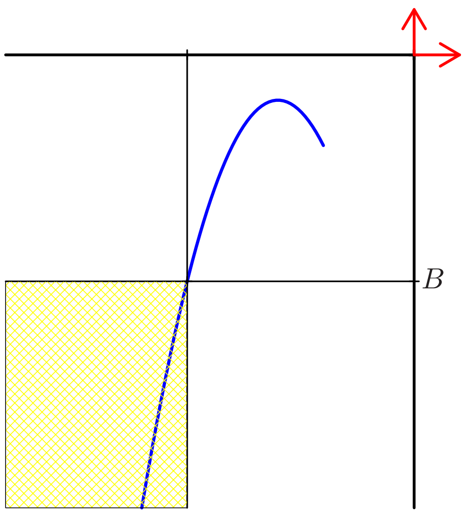
Définition 4. *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; A[$. On dit que la fonction f admet pour limite le nombre l en $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x négatif de valeur absolue assez grande et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.*



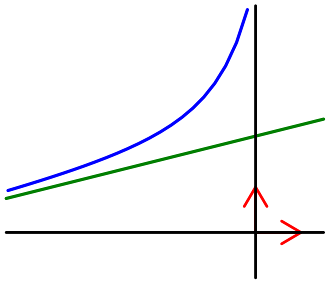
La droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$.

Définition 5. *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; A[$. On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]B; +\infty[$ (resp. $]-\infty; B[$) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x négatif de valeur absolue assez grande et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$).*



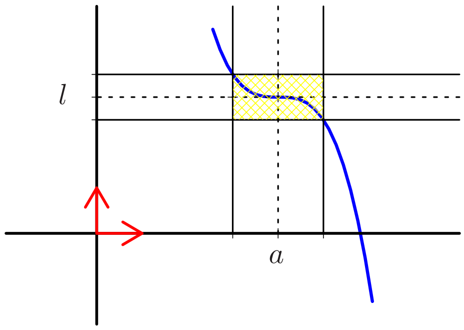


Définition 6. *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; A[$. On dit que la droite d'équation $y = mx+p$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $-\infty$ si* $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(mx+p)] = 0$.

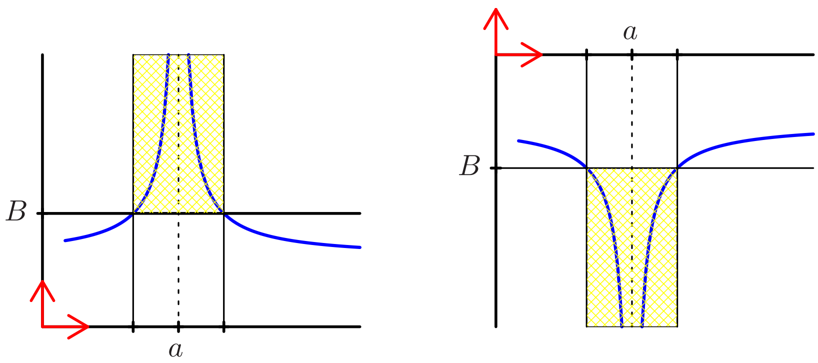


1.3 Limite d'une fonction en un réel

Définition 7. *Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a. On dit que la fonction f admet pour limite le nombre l en a si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.*



Définition 8. *Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a. On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en a si tout intervalle de la forme $]B; +\infty[$ (resp. $]-\infty; B[$) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$).*



La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.

2 Opérations sur les limites

2.1 Limite de la somme de deux fonctions

Théorème 1.

$\lim\limits_{x\to} u(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to} v(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to}[u(x)+v(x)]$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Démonstration. admise. □

2.2 Limite du produit de deux fonctions

Théorème 2.

$\lim\limits_{x\to} u(x)$	l	$l \neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{x\to} v(x)$	l'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to} [u(x) \times v(x)]$	$l \times l'$	∞	?	∞

Le signe de la limite s'obtenant au moyen de la règle des signes pour la multiplication.

Démonstration. admise. □

2.3 Limite du quotient de deux fonctions

Théorème 3.

$\lim\limits_{x\to} u(x)$	l	$l \neq 0$	∞	l	∞	0
$\lim\limits_{x\to} v(x)$	$l' \neq 0$	0	l'	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to} \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{l}{l'}$	∞	∞	0	?	?

Le signe de la limite s'obtenant au moyen de la règle des signes pour la division.

Démonstration. admise. □

2.4 Limite de la composée de deux fonctions

Définition 9. *Soit u une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et v une fonction définie sur l'intervalle J. On appelle* fonction composée *de u par v la fonction notée $v \circ u$ définie sur l'intervalle I par $v \circ u(x) = v[u(x)]$.*

Théorème 4. *On désigne par les lettres α, β et γ un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = \beta$ et $\lim\limits_{x\to\beta} v(x) = \gamma$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} (v \circ u)(x) = \gamma$.*

Démonstration. admise. □

Exemple 4. *limite de $\sqrt{x^2+1}$ pour $x \to +\infty$.*

3 Comparaison de limites

Le théorème qui suit est appelé *Théorème des Gendarmes.*

Théorème 5. *On désigne par la lettre α un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et par la lettre l un nombre réel. Soient u, v et w trois fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que $u(x) \leqslant v(x) \leqslant w(x)$ pour tout $x \in I$. Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} w(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) = l$.*

Démonstration. au programme dans le cas $\alpha = +\infty$. □

Dans le cas d'une limite infinie, un seul "gendarme" est nécessaire :

Théorème 6. *On désigne par la lettre α un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soient u et v deux fonctions définies au voisinage de α sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*
- *Si $u(x) \leqslant v(x)$ pour tout $x \in I$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) = +\infty$.*
- *Si $u(x) \leqslant v(x)$ pour tout $x \in I$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = -\infty$.*

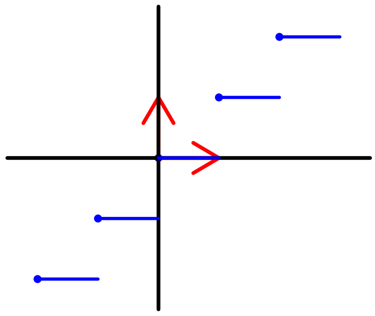
Démonstration. admise. □

4 Continuité d'une fonction

Définition 10. *Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite* continue *en $a \in I$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Contre-Exemple 1. *fonction partie entière.*

On note $E(x)$ le plus grand entier inférieur ou égal à x.



Définition 11. *Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite* continue *sur I si elle est continue en tout point de I.*

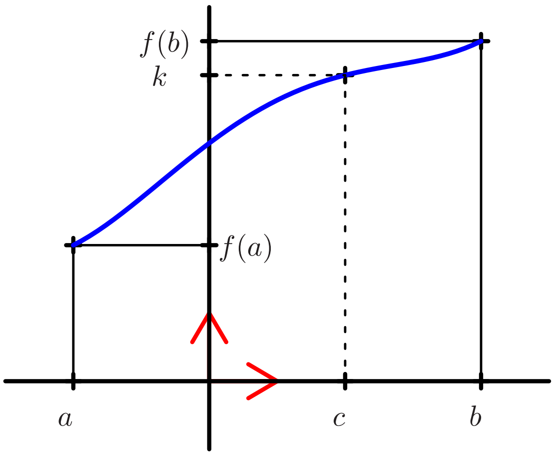
Intuitivement, une fonction continue sur un intervalle peut être représentée graphiquement sans lever le crayon.

Théorème 7.
- *Les fonctions $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.*
- *Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.*
- *Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$ sont continues sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.*
- *Les fonctions rationnelles sont continues sur chacun des intervalles de leur ensemble de définition.*
- *La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.*
- *Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. admise. □

5 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 8. *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a et b deux réels de I. Pour tout réel $k \in [f(a); f(b)]$ il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.*



Démonstration. au programme avec l'utilisation de suites adjacentes. □

Corollaire 1. *Soit f une fonction définie, continue et* strictement monotone *sur un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$. Alors pour tout réel $k \in [f(a); f(b)]$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a; b]$.*

Démonstration. au programme. □