

Devoir maison de Mathématiques n°1

Exercice 1

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x + 2}{x^2 - x - 2}$ et on appelle \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f . Étudier ses limites aux bornes de cet ensemble.
2. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est dérivable puis calculer sa dérivée. En déduire les variations de la fonction f .
3. Montrer que la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$ est une asymptote à \mathcal{C}_f en $+\infty$ et $-\infty$. Étudier la position de \mathcal{C}_f par rapport à \mathcal{D} .
4. Construire \mathcal{C}_f en faisant apparaître ses asymptotes ainsi que ses tangentes horizontales.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2 + 5x - 6}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$.

1. Montrer que la fonction f est continue sur $] -\infty; 2[$ ainsi que sur $]2; +\infty[$.
2. Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x \neq 2}} f(x)$.
3. La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ?

Exercice 3

On considère l'équation $(E) : x^3 - x + 1 = 0$.

1. Étudier les variations de la fonction $f(x) = x^3 - x + 1$.
2. En déduire que l'équation (E) admet une unique solution réelle x_0 et que celle-ci appartient à l'intervalle $[-2; -1]$.
3. Donner un encadrement de x_0 à 10^{-3} près.