Correction du devoir maison de Mathématiques n°1

Exercice 1

1. La fonction f est une fonction rationnelle, de plus $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, elle est donc définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 2[\cup]2; +\infty[$.
   On a :
$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{-1}{-3(x+1)} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{-1}{-3(x+1)} = +\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{8}{3(x-2)} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{8}{3(x-2)} = +\infty$$
   De plus pour $x \neq 0$:
$$f(x) = \frac{x^3\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = x\frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$$
   D'où :
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$$
2. La fonction f est une fonction rationnelle donc dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$, $]-1; 2[$ et $]2; +\infty[$:
$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 2x + 1)(x^2 - x - 2) - (x^3 - x^2 + x + 2)(2x-1)}{(x^2 - x - 2)^2} = \frac{x^2(x^2 - 2x - 6)}{(x^2 - x - 2)^2}$$
   On en déduit les variations de la fonction f :

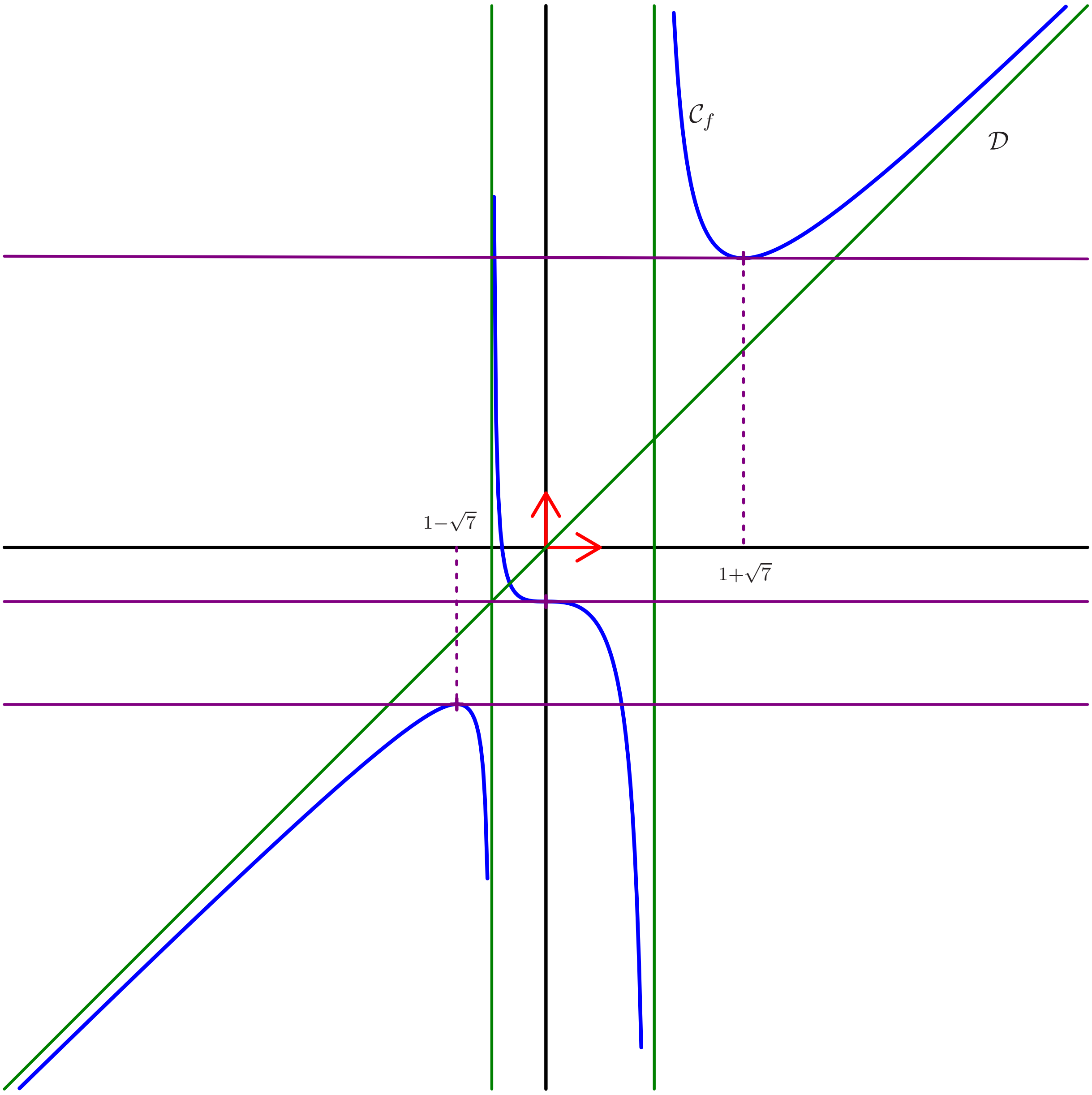
x	$-\infty$		$1-\sqrt{7}$		-1		2		$1+\sqrt{7}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
			$\frac{11-14\sqrt{7}}{9}$		‖ $+\infty$		‖ $+\infty$				$+\infty$
$f(x)$		↗		↘	‖	↘	‖	↘		↗	
	$-\infty$				$-\infty$ ‖		$-\infty$ ‖		$\frac{11+14\sqrt{7}}{9}$		

3. On a :
$$f(x) - x = \frac{x^3 - x^2 + x + 2 - x(x^2 - x - 2)}{x^2 - x - 2} = \frac{3x+2}{x^2 - x - 2}$$
   Or $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x+2}{x^2-x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x}} = 0$ donc la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.

x		-1		$-\frac{2}{3}$		2	
$3x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x) - x = \frac{3x+2}{(x+1)(x-2)}$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$

   $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ pour $x \in]-1; -\frac{2}{3}]\cup]2; +\infty[$ et en-dessous pour $x \in]-\infty; -1[\cup[-\frac{2}{3}; 2[$.

4. La courbe représentative de la fonction f est la suivante :



Exercice 2

1. Sur les intervalles $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$ la fonction f est rationnelle sans valeur interdite, elle est donc continue.
2. On a :
$$\frac{-x^2+5x-6}{x-2} = \frac{-(x-2)(x-3)}{x-2} = 3-x \quad \text{pour} \quad x \neq 2$$
D'où :
$$\lim_{\substack{x\to 2 \\ x\neq 2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ x\neq 2}} (3-x) = 1$$
3. On a $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x\neq 2}} f(x) = f(2)$ donc la fonction f est continue en 2, elle est aussi continue sur les intervalles $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$ donc elle continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

On considère l'équation $(E)\ :\ x^3 - x + 1 = 0$.

1. La fonction f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 1$ on en déduit les variations de la fonction f :

x			$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1+\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$1-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x^3 - x + 1) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3$$

2. Sur l'intervalle $]-\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty[$ on a $f(x) > 1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0$ donc l'équation $x^3 - x + 1 = 0$ n'admet pas de solution. On a f continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{3}]$ et de plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0$ donc d'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires l'équation $x^3 - x + 1 = 0$ admet une unique solution réelle x_0 sur l'intervalle $]-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{3}]$. De plus $f(-2) = -5 < 0$ et $f(-1) = 1 > 0$ donc $x_0 \in [-2;-1]$.
3. On a $f(-1,325) < 0$ et $f(-1,324) > 0$ donc $-1,325 < x_0 < -1,324$.