

Devoir de Mathématiques n°1

Exercice 1

On considère l'équation $(E) : x^3 - 6x^2 + 12x - 5 = 0$.

1. Étudier les variations de la fonction $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$.
2. En déduire que l'équation (E) admet une unique solution réelle x_0 .
3. Donner un encadrement de x_0 à 10^{-3} près.
4. (*Bonus*) Démontrer que $x_0 = 2 - 3^{\frac{1}{3}}$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$ et on appelle \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f . Étudier ses limites aux bornes de cet ensemble. En déduire l'existence d'une asymptote verticale à la courbe \mathcal{C}_f .
2. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est dérivable puis calculer sa dérivée. En déduire les variations de la fonction f .
3. Déterminer les réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire l'existence d'une asymptote \mathcal{D} à la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$ et $-\infty$. Étudier la position de \mathcal{C}_f par rapport à \mathcal{D} .
4. Construire \mathcal{C}_f en faisant apparaître ses asymptotes ainsi que ses tangentes horizontales.
5. (*Bonus*) Démontrer que la courbe \mathcal{C}_f admet un centre de symétrie.

Exercice 3 (Inégalité de Bernoulli)

1. On considère la fonction $f(x) = (1 + x)^n$; $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Montrer que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
 - (b) Déterminer le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
 - (c) En déduire que pour tout $x \geq 0$ on a $(1 + x)^n \geq 1$.
2. On considère la fonction $g(x) = (1 + x)^n - 1 - nx$; $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Montrer que la fonction g est définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et calculer $g'(x)$.
 - (b) Prouver que $g'(x) \geq 0$ pour $x \in [0; +\infty[$, déterminer le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
 - (c) En déduire que pour tout $x \geq 0$ on a $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 4 (*Bonus*)

Démontrer que tout polynôme du troisième degré admet au moins une racine réelle.