Devoir de Mathématiques n°1

Exercice 1

On considère l'équation $(E)\ :\ x^3 - 9x^2 + 27x - 24 = 0$.

1. Étudier les variations de la fonction $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 24$.
2. En déduire que l'équation (E) admet une unique solution réelle x_0.
3. Donner un encadrement de x_0 à 10^{-3} près.
4. *(Bonus)* Démontrer que $x_0 = 3 - 3^{\frac{1}{3}}$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x+1}$ et on appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f. Étudier ses limites aux bornes de cet ensemble. En déduire l'existence d'une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est dérivable puis calculer sa dérivée. En déduire les variations de la fonction f.
3. Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire l'existence d'une asymptote $\mathcal{D}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$. Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}$.
4. Construire $\mathcal{C}_f$ en faisant apparaître ses asymptotes ainsi que ses tangentes horizontales.
5. *(Bonus)* Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un centre de symétrie.

Exercice 3 **(Inégalité de Bernoulli)**

1. On considère la fonction $f(x) = (1+x)^n \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
   (b) Déterminer le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
   (c) En déduire que pour tout $x \geqslant 0$ on a $(1+x)^n \geqslant 1$.
2. On considère la fonction $g(x) = (1+x)^n - 1 - nx \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que la fonction g est définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et calculer $g'(x)$.
   (b) Prouver que $g'(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0; +\infty[$, déterminer le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
   (c) En déduire que pour tout $x \geqslant 0$ on a $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

Exercice 4 ***(Bonus)***

Démontrer que tout polynôme du troisième degré admet au moins une racine réelle.