

## Devoir de Mathématiques n°1

**Exercice 1**

On considère l'équation  $(E) : x^3 - 9x^2 + 27x - 24 = 0$ .

1. Étudier les variations de la fonction  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 24$ .
2. En déduire que l'équation  $(E)$  admet une unique solution réelle  $x_0$ .
3. Donner un encadrement de  $x_0$  à  $10^{-3}$  près.
4. (*Bonus*) Démontrer que  $x_0 = 3 - 3^{\frac{1}{3}}$ .

**Exercice 2**

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x + 1}$  et on appelle  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ . Étudier ses limites aux bornes de cet ensemble. En déduire l'existence d'une asymptote verticale à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
2. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction  $f$  est dérivable puis calculer sa dérivée. En déduire les variations de la fonction  $f$ .
3. Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . En déduire l'existence d'une asymptote  $\mathcal{D}$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ . Étudier la position de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à  $\mathcal{D}$ .
4. Construire  $\mathcal{C}_f$  en faisant apparaître ses asymptotes ainsi que ses tangentes horizontales.
5. (*Bonus*) Démontrer que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet un centre de symétrie.

**Exercice 3 (Inégalité de Bernoulli)**

1. On considère la fonction  $f(x) = (1 + x)^n$  ;  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - (a) Montrer que la fonction  $f$  est définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  et calculer  $f'(x)$ .
  - (b) Déterminer le tableau de variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
  - (c) En déduire que pour tout  $x \geq 0$  on a  $(1 + x)^n \geq 1$ .
2. On considère la fonction  $g(x) = (1 + x)^n - 1 - nx$  ;  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - (a) Montrer que la fonction  $g$  est définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  et calculer  $g'(x)$ .
  - (b) Prouver que  $g'(x) \geq 0$  pour  $x \in [0; +\infty[$ , déterminer le tableau de variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
  - (c) En déduire que pour tout  $x \geq 0$  on a  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ .

**Exercice 4 (*Bonus*)**

Démontrer que tout polynôme du troisième degré admet au moins une racine réelle.