Correction du devoir de Mathématiques n°1

Exercice 1

1. La fonction f est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 18x + 27 = 3(x-3)^2$. On a $f'(x) > 0$ pour $x \neq 3$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. De plus :
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^3\left(1 - \frac{9}{x} + \frac{27}{x^2} - \frac{24}{x^3}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} x^3$$
d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, f étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle x_0 d'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires.
3. Un tableau de valeurs à la calculatrice donne l'encadrement $1,557 < x_0 < 1,558$.
4. Posons $\alpha = 3 - 3^{\frac{1}{3}}$, on a :
$$\begin{array}{rcl} \alpha^3 & = & (3 - 3^{\frac{1}{3}})^3 = 24 + 9 \times 3^{\frac{2}{3}} - 27 \times 3^{\frac{1}{3}} \\ \alpha^2 & = & (3 - 3^{\frac{1}{3}})^2 = 9 + 3^{\frac{2}{3}} - 6 \times 3^{\frac{1}{3}} \end{array}$$
D'où $\alpha^3 - 9\alpha^2 + 27\alpha - 24 = 0$ et donc $x_0 = \alpha$.

Exercice 2

1. La fonction f est définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$. On a :
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$$
et :
$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{3}{x+1} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{3}{x+1} = +\infty$$
La droite d'équation $x = -1$ est donc une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. La fonction f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur les intervalles $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$, de plus :
$$f'(x) = \frac{2x \times (x+1) - (x^2+2) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 2}{(x+1)^2}$$
on en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		-1		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-2(1+\sqrt{3})$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-2(1-\sqrt{3})$	$\nearrow$	$+\infty$

3. On a :

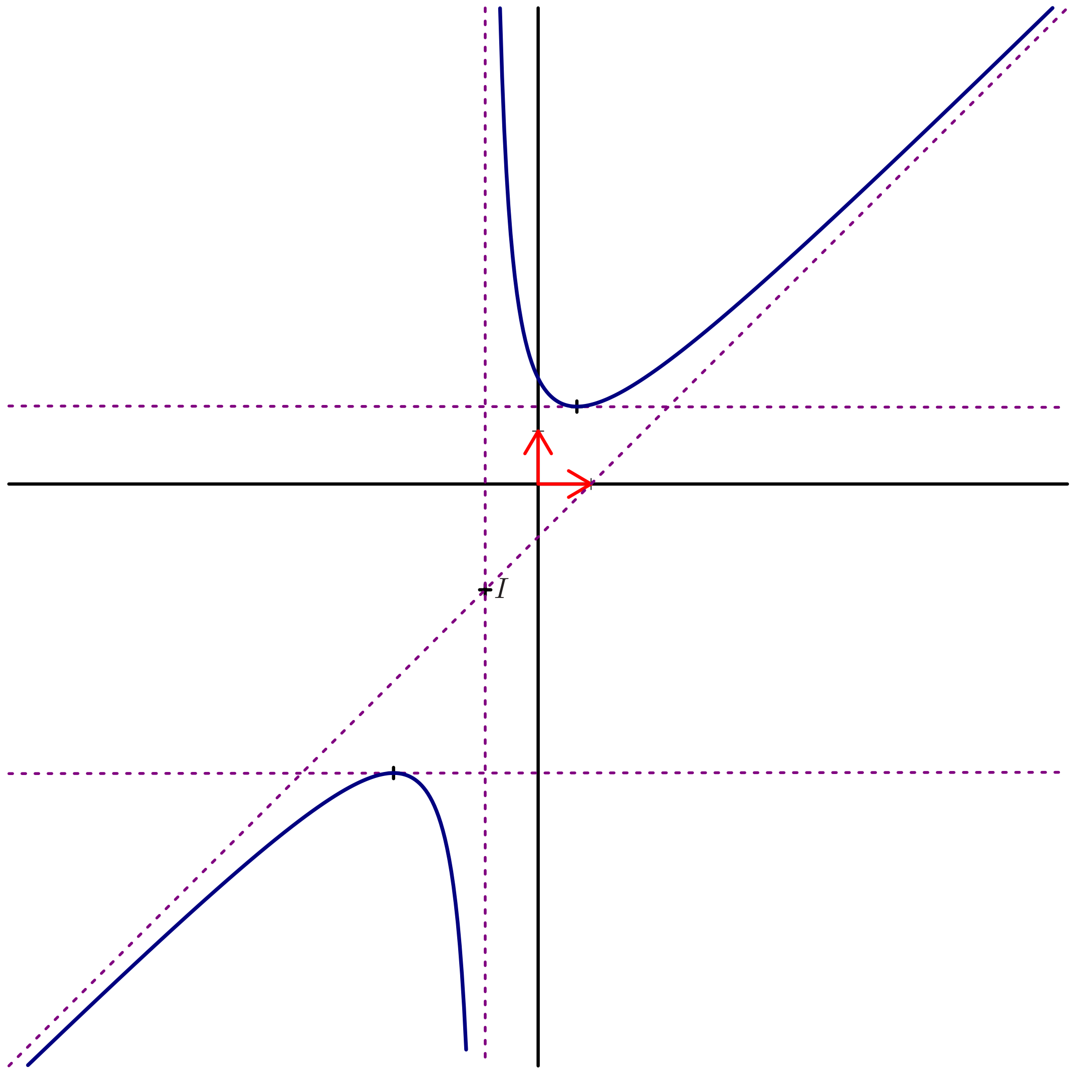
$$\frac{x^2+2}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)+3}{x+1} = x-1+\frac{3}{x+1}$$

De plus :

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x+1} = 0$$

donc la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x-1$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$, comme $f(x)-(x-1)$ est du signe de $(x+1)$ on en déduit que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ pour $x > -1$ et au-dessous pour $x < -1$.

4. La courbe représentative de la fonction f est la suivante :



5. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet le point $I(-1;-2)$ pour centre de symétrie :

$$\begin{aligned}
\frac{f(-1-h)+f(-1+h)}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{(-1-h)^2+2}{(-1-h)+1}+\frac{(-1+h)^2+2}{(-1+h)+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{h^2+2h+3}{-h}+\frac{h^2-2h+3}{h}\right)\\
&= \frac{-h^2-2h-3+h^2-2h+3}{2h}\\
&= -2
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. (a) La fonction f est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et *a fortiori* sur l'intervalle $[0;+\infty[$, de plus :

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} \times 1 = n(1+x)^{n-1}$$

   (b) La fonction f' est positive sur l'intervalle $[0;+\infty[$ donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

   (c) On en déduit que pour tout $x \geqslant 0$ on a $f(x) \geqslant f(0)$ soit $(1+x)^n \geqslant 1$.

2. (a) La fonction g est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et *a fortiori* sur l'intervalle $[0;+\infty[$. De plus $g(x) = f(x) - 1 - nx$ donc $g'(x) = f'(x) - n$:

$$g'(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n((1+x)^{n-1} - 1)$$

   (b) D'après la question 1.c, on sait que $(1+x)^n \geqslant 1$ pour $x \geqslant 0$. Ce résultat étant vrai pour tout entier n, on a donc $(1+x)^{n-1} \geqslant 1$ pour $x \geqslant 0$. Par conséquent $g'(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0;+\infty[$, la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

   (c) On en déduit que pour tout $x \geqslant 0$ on a $g(x) \geqslant g(0)$ soit $(1+x)^n - 1 - nx \geqslant 0$ et finalement :

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Exercice 4

Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. On a :

$$\begin{array}{lll} \text{Si } a > 0 \ : & \lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty & \lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty \\ \text{Si } a < 0 \ : & \lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = +\infty & \lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = -\infty \end{array}$$

De plus, la fonction P est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution.

On a donc démontré que tout polynôme du troisième degré admet au moins une racine réelle.