Correction du devoir de Mathématiques n°1

Exercice 1

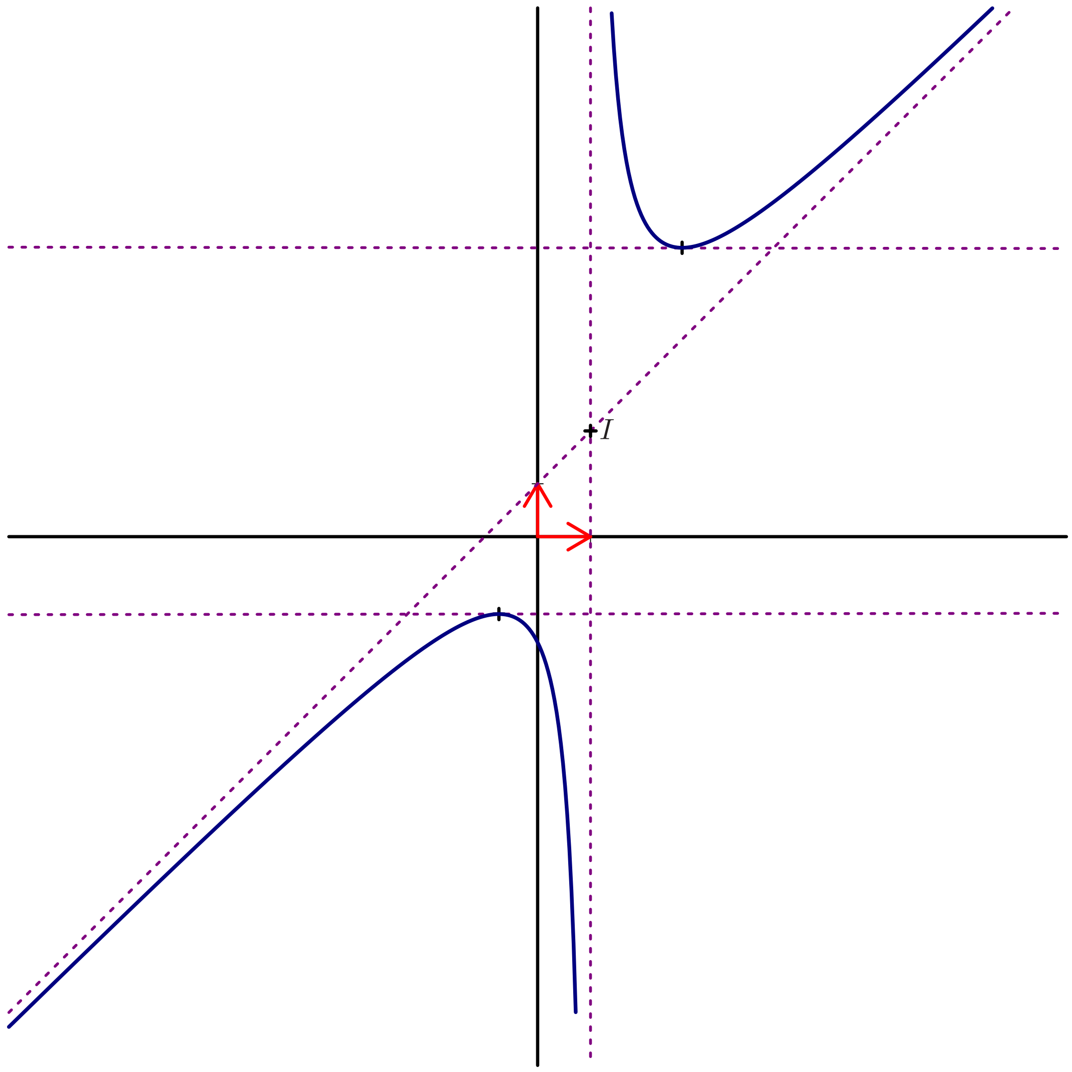
1. La fonction f est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2$. On a $f'(x) > 0$ pour $x \neq 2$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. De plus :
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3(1 - \frac{6}{x} + \frac{12}{x^2} - \frac{5}{x^3}) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3$$
d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, f étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle x_0 d'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires.
3. Un tableau de valeurs à la calculatrice donne l'encadrement $0,557 < x_0 < 0,558$.
4. Posons $\alpha = 2 - 3^{\frac{1}{3}}$, on a :
$$\begin{array}{rcl} \alpha^3 & = & (2-3^{\frac{1}{3}})^3 = 5 + 6 \times 3^{\frac{2}{3}} - 12 \times 3^{\frac{1}{3}} \\ \alpha^2 & = & (2-3^{\frac{1}{3}})^2 = 4 + 3^{\frac{2}{3}} - 4 \times 3^{\frac{1}{3}} \end{array}$$
D'où $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 12\alpha - 5 = 0$ et donc $x_0 = \alpha$.

Exercice 2

1. La fonction f est définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$. On a :
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} = +\infty$$
et :
$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{3}{x-1} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{3}{x-1} = +\infty$$
La droite d'équation $x = 1$ est donc une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. La fonction f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur les intervalles $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$, de plus :
$$f'(x) = \frac{2x \times (x-1) - (x^2+2) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$$
on en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2(1-\sqrt{3})$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$2(1+\sqrt{3})$	$\nearrow$	$+\infty$

3. On a :
$$\frac{x^2+2}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)+3}{x-1} = x+1+\frac{3}{x-1}$$
De plus :
$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x-1} = 0$$
donc la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x+1$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$, comme $f(x)-(x+1)$ est du signe de $(x-1)$ on en déduit que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ pour $x > 1$ et au-dessous pour $x < 1$.
4. La courbe représentative de la fonction f est la suivante :



5. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet le point $I(1;2)$ pour centre de symétrie :
$$\begin{aligned}\frac{f(1-h)+f(1+h)}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{(1-h)^2+2}{(1-h)-1}+\frac{(1+h)^2+2}{(1+h)-1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{h^2-2h+3}{-h}+\frac{h^2+2h+3}{h}\right)\\ &= \frac{-h^2+2h-3+h^2+2h+3}{2h}\\ &= 2\end{aligned}$$

Exercice 3

1. (a) La fonction f est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et *a fortiori* sur l'intervalle $[0;+\infty[$, de plus :

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} \times 1 = n(1+x)^{n-1}$$

   (b) La fonction f' est positive sur l'intervalle $[0;+\infty[$ donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

   (c) On en déduit que pour tout $x \geqslant 0$ on a $f(x) \geqslant f(0)$ soit $(1+x)^n \geqslant 1$.

2. (a) La fonction g est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et *a fortiori* sur l'intervalle $[0;+\infty[$. De plus $g(x) = f(x) - 1 - nx$ donc $g'(x) = f'(x) - n$:

$$g'(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n((1+x)^{n-1} - 1)$$

   (b) D'après la question 1.c, on sait que $(1+x)^n \geqslant 1$ pour $x \geqslant 0$. Ce résultat étant vrai pour tout entier n, on a donc $(1+x)^{n-1} \geqslant 1$ pour $x \geqslant 0$. Par conséquent $g'(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0;+\infty[$, la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

   (c) On en déduit que pour tout $x \geqslant 0$ on a $g(x) \geqslant g(0)$ soit $(1+x)^n - 1 - nx \geqslant 0$ et finalement :

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Exercice 4

Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. On a :

$$\begin{array}{ll} \text{Si } a > 0 \ : & \lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty \quad \lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty \\ \text{Si } a < 0 \ : & \lim_{x \to -\infty} P(x) = +\infty \quad \lim_{x \to +\infty} P(x) = -\infty \end{array}$$

De plus, la fonction P est continue sur $\mathbb{R}$ donc d'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution.

On a donc démontré que tout polynôme du troisième degré admet au moins une racine réelle.