

Correction du devoir de Mathématiques n°1

Exercice 1

1. La fonction f est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2$. On a $f'(x) > 0$ pour $x \neq 2$ donc la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2. De plus :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{12}{x^2} - \frac{5}{x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3$$

d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, f étant continue et strictement croissante sur \mathbb{R} on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle x_0 d'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires.

3. Un tableau de valeurs à la calculatrice donne l'encadrement $0,557 < x_0 < 0,558$.

4. Posons $\alpha = 2 - 3^{\frac{1}{3}}$, on a :

$$\begin{aligned} \alpha^3 &= (2 - 3^{\frac{1}{3}})^3 = 5 + 6 \times 3^{\frac{2}{3}} - 12 \times 3^{\frac{1}{3}} \\ \alpha^2 &= (2 - 3^{\frac{1}{3}})^2 = 4 + 3^{\frac{2}{3}} - 4 \times 3^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

D'où $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 12\alpha - 5 = 0$ et donc $x_0 = \alpha$.

Exercice 2

1. La fonction f est définie sur $] -\infty; 1[\cup]1; +\infty[$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = +\infty$$

et :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{3}{x - 1} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{3}{x - 1} = +\infty$$

La droite d'équation $x = 1$ est donc une asymptote verticale à la courbe \mathcal{C}_f .

2. La fonction f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur les intervalles $] -\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$, de plus :

$$f'(x) = \frac{2x \times (x - 1) - (x^2 + 2) \times 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)^2}$$

on en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{3}$	1	$1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0
$f(x)$	$-\infty$	$2(1 - \sqrt{3})$	$-\infty$	$+\infty$	$2(1 + \sqrt{3})$

3. On a :

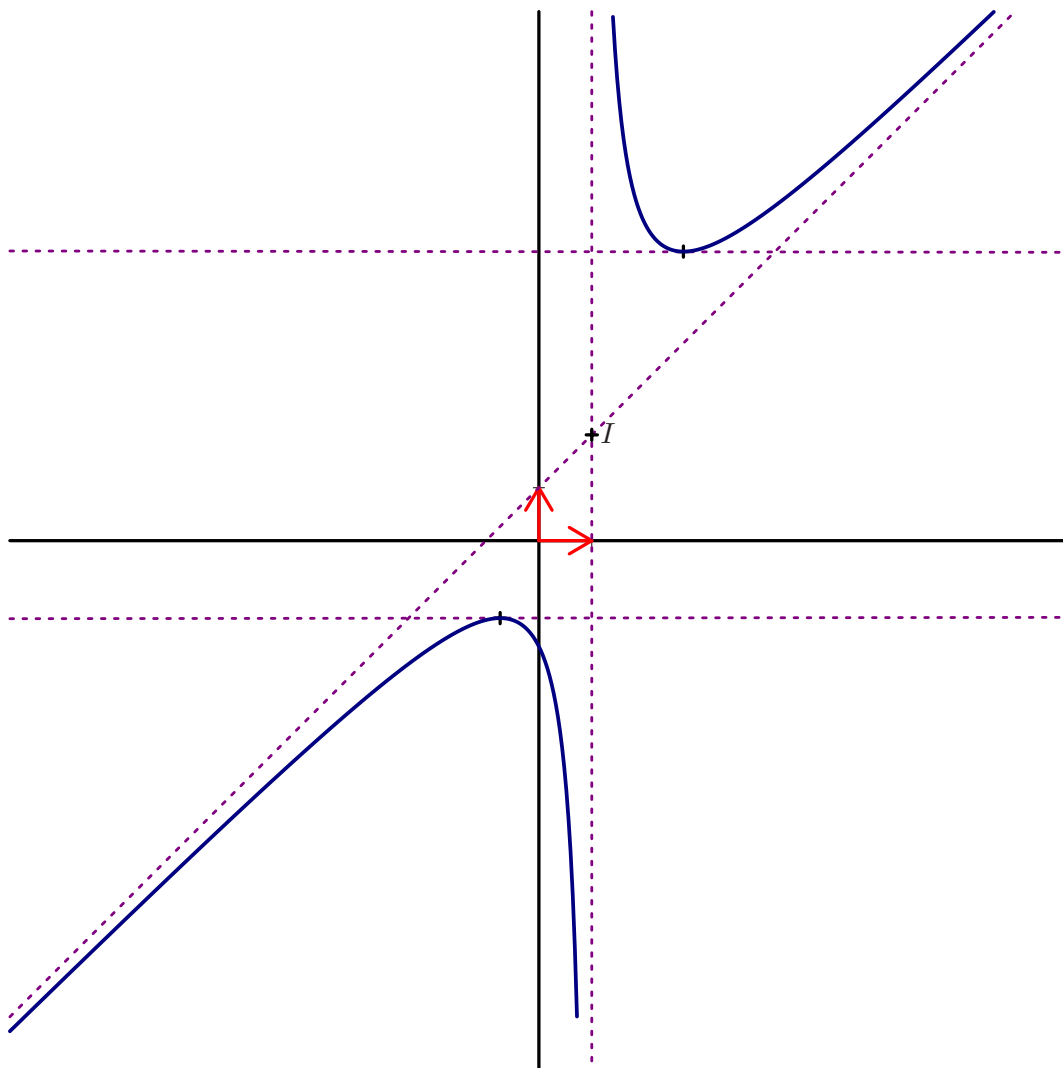
$$\frac{x^2 + 2}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1) + 3}{x - 1} = x + 1 + \frac{3}{x - 1}$$

De plus :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x - 1} = 0$$

donc la droite \mathcal{D} d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$ et $-\infty$, comme $f(x) - (x + 1)$ est du signe de $(x - 1)$ on en déduit que \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{D} pour $x > 1$ et au-dessous pour $x < 1$.

4. La courbe représentative de la fonction f est la suivante :



5. La courbe \mathcal{C}_f admet le point $I(1; 2)$ pour centre de symétrie :

$$\begin{aligned} \frac{f(1-h) + f(1+h)}{2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{(1-h)^2 + 2}{(1-h) - 1} + \frac{(1+h)^2 + 2}{(1+h) - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{h^2 - 2h + 3}{-h} + \frac{h^2 + 2h + 3}{h} \right) \\ &= \frac{-h^2 + 2h - 3 + h^2 + 2h + 3}{2h} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Exercice 3

1. (a) La fonction f est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur \mathbb{R} et *a fortiori* sur l'intervalle $[0; +\infty[$, de plus :

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} \times 1 = n(1+x)^{n-1}$$

- (b) La fonction f' est positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- (c) On en déduit que pour tout $x \geq 0$ on a $f(x) \geq f(0)$ soit $(1+x)^n \geq 1$.

2. (a) La fonction g est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur \mathbb{R} et *a fortiori* sur l'intervalle $[0; +\infty[$. De plus $g(x) = f(x) - 1 - nx$ donc $g'(x) = f'(x) - n$:

$$g'(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n((1+x)^{n-1} - 1)$$

- (b) D'après la question 1.c, on sait que $(1+x)^n \geq 1$ pour $x \geq 0$. Ce résultat étant vrai pour tout entier n , on a donc $(1+x)^{n-1} \geq 1$ pour $x \geq 0$. Par conséquent $g'(x) \geq 0$ pour $x \in [0; +\infty[$, la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- (c) On en déduit que pour tout $x \geq 0$ on a $g(x) \geq g(0)$ soit $(1+x)^n - 1 - nx \geq 0$ et finalement :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Exercice 4

Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. On a :

$$\begin{array}{l} \text{Si } a > 0 : \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty \\ \text{Si } a < 0 : \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = -\infty \end{array}$$

De plus, la fonction P est continue sur \mathbb{R} donc d'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution.

On a donc démontré que tout polynôme du troisième degré admet au moins une racine réelle.