Approximations locales de fonctions

Approximations locales affines de fonctions

On rappelle que si une fonction f est définie et dérivable au voisinage d'un point x_0 alors elle admet une approximation locale affine au voisinage de x_0 de la forme :

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

1. On considère la fonction $f(x) = (1 + x)^2$.
   (a) Prouver que f est définie et dérivable au voisinage de zéro.
   (b) Exprimer sa dérivée f' puis calculer $f'(0)$.
   (c) En déduire que $(1 + x)^2 \simeq 1 + 2x$ au voisinage de zéro.
2. Déterminer au moyen de la méthode précédente une approximation affine au voisinage de zéro des quantités suivantes :

$$(1 + x)^3 \qquad (1 + x)^n \qquad \frac{1}{1 + x} \qquad \sqrt{1 + x} \qquad \sin(x) \qquad \cos(x)$$

Approximations locales quadratiques de fonctions

Une approximation par un trinôme du second degré peut être nécessaire si l'on désire améliorer la précision. On admet que si une fonction f est définie et deux fois dérivable au voisinage d'un point x_0 alors elle admet une approximation locale affine au voisinage de x_0 de la forme :

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

1. On considère la fonction $f(x) = (1 + x)^2$.
   (a) Prouver que f est définie et dérivable au voisinage de zéro, exprimer sa dérivée f' puis calculer $f'(0)$.
   (b) Prouver que f est deux fois dérivable au voisinage de zéro, exprimer sa dérivée seconde f'' puis calculer $f''(0)$.
   (c) En déduire que $(1 + x)^2 \simeq 1 + 2x + x^2$ au voisinage de zéro. Que peut-on dire au sujet de la précision de cette approximation ?
2. Déterminer au moyen de la méthode précédente une approximation quadratique au voisinage de zéro des quantités suivantes :

$$(1 + x)^3 \qquad (1 + x)^n \qquad \frac{1}{1 + x} \qquad \sqrt{1 + x} \qquad \sin(x) \qquad \cos(x)$$