

Étude de la fonction tangente

Définition. On définit la fonction tangente par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

1. Déterminer les valeurs exactes de la fonction tangente en $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction tangente.
3. Étudier la périodicité de la fonction tangente.
4. Étudier la parité de la fonction tangente.
5. Étudier la dérivabilité de la fonction tangente. Calculer sa fonction dérivée que l'on exprimera en fonction de $\cos x$ puis en fonction de $\tan x$.
6. En déduire les variations de la fonction tangente.
7. Déterminer les limites infinies de la fonction tangente.
8. Exprimer $\tan(a + b)$ puis $\tan(a - b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$, on pourra utiliser les formules d'addition suivantes :

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

9. Prouver la relation suivante :

$$\tan x = \frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$$

10. En déduire les valeurs exactes de $\tan \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$.