Méthode d'Euler
(Approximation d'une primitive)

Le but de l'activité est d'étudier graphiquement la primitive F de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ vérifiant la condition initiale $F(0) = 0$.

Méthode d'Euler de pas $\delta = 1$.

On rappelle qu'une fonction g définie et dérivable au voisinage d'un point a peut être approchée localement par la fonction affine $x \mapsto g(a) + g'(a)(x-a)$ au voisinage de a.

1. (a) Écrire une approximation affine de la fonction F au voisinage de 0, montrer que $F(1) \simeq F(0) + f(0)$.
   (b) En déduire une valeur approchée de $F(1)$.
2. (a) Écrire une approximation affine de la fonction F au voisinage de 1, montrer que $F(2) \simeq F(1) + f(1)$.
   (b) En déduire une valeur approchée de $F(2)$.
3. (a) Écrire une approximation affine de la fonction F au voisinage de $n \in \mathbb{N}$, montrer que $F(n+1) \simeq F(n) + f(n)$.
   (b) En déduire à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de $F(n)$ pour $1 \leqslant n \leqslant 10$.
4. Tracer sur un graphique l'approximation de la fonction F réalisée, on prendra comme unités 1cm en abscisse et 5cm en ordonnée. Faire figurer sur le graphique la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Méthode d'Euler de pas δ quelconque.

On considère un pas $\delta > 0$ et on note $x_n = \delta n$, $n \in \mathbb{N}$ la suite des valeurs associées en abscisse. On note F_n , $n \in \mathbb{N}$ la suite des valeurs approchées par la méthode d'Euler des $F(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Quelle est la valeur de F_0 ?
2. (a) Écrire une approximation affine de la fonction F au voisinage de x_n pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $F(x_{n+1}) \simeq F(x_n) + \delta f(x_n)$.
   (b) En déduire que $F_{n+1} = F_n + \dfrac{\delta}{1+\delta^2 n^2}$.
3. Programmer à l'aide d'un tableur le tableau de valeurs de la suite $(F_n)_{n \geqslant 0}$ avec $\delta = 0,25$.
4. Tracer sur le graphique de la partie précédente la nouvelle approximation de la fonction F obtenue.