Dérivées et Primitives

1 Dérivée d'une fonction

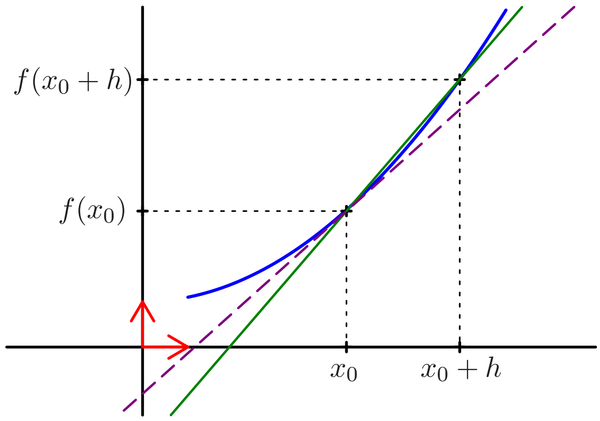
1.1 Nombre dérivé d'une fonction f en x_0.

Définition 1. *Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est dite dérivable en $x_0 \in I$ si le quotient $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite quand x tend vers x_0, cette limite est alors appelée* nombre dérivé *de la fonction f en x_0 et notée $f'(x_0)$.*

Cette définition peut être formulée différemment en posant $x = x_0 + h$:

Définition 2. *Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est dite dérivable en $x_0 \in I$ si le quotient $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite quand h tend vers 0, cette limite est alors appelée* nombre dérivé *de la fonction f en x_0 et notée $f'(x_0)$.*

La quantité $\Delta_{x_0}(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est appelée taux d'accroissement de la fonction f en x_0.



$\Delta_{x_0}(h)$ peut s'interpréter graphiquement comme le coefficient directeur de la droite passant par les points de la courbe représentative de f d'abscisses x_0 et x_0+h.

Propriété 1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et dérivable en $x_0 \in I$ alors la courbe représentative de f admet une tangente au point $M_0(x_0; f(x_0))$ d'équation :*

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

La fonction affine $x \mapsto f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ est la meilleure approximation affine locale de la fonction f au voisinage de x_0.

Démonstration. admise. □

On peut donc écrire au voisinage de x_0 que $f(x) \simeq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ soit $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \simeq f'(x_0)$ d'où l'*écriture différentielle* utilisée en Physique : $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$.

Théorème 1. *Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et dérivable en $x_0 \in I$ est continue en x_0.*

Démonstration. au programme. □

1.2 Fonctions dérivées

Définition 3. *Une fonction f définie sur un intervalle de I de $\mathbb{R}$ est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I, la fonction qui à tout réel $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x est appelée* fonction dérivée *de f et notée f'.*

Théorème 2. *Dérivées des fonctions usuelles.*

$f(x)$	*ensemble de définition*	*intervalle(s) de dérivabilité*	$f'(x)$
Cte	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$ax+b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
$x^n \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$]-\infty;0[\; et \;]0;+\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n} = x^{-n} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$]-\infty;0[\; et \;]0;+\infty[$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\mathbb{R}_+$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$

Démonstration. partiellement au programme. □

Théorème 3. *Dérivées et opérations.*
- *Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors la fonction $u+v : x \mapsto u(x)+v(x)$ est dérivable sur I et $(u+v)'(x) = u'(x)+v'(x)$.*
- *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel alors la fonction $ku : x \mapsto k \times u(x)$ est dérivable sur I et $(ku)'(x) = k \times u'(x)$.*
- *Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors la fonction $uv : x \mapsto u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I et $(uv)'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.*
- *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I ne s'annulant pas sur I alors la fonction $\dfrac{1}{u} : x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u}\right)'(x) = -\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$.*
- *Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I avec v ne s'annulant pas sur I alors la fonction $\dfrac{u}{v} : x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$.*

Démonstration. au programme. □

Théorème 4. *Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un intervalle J et v une fonction définie et dérivable sur J alors la fonction composée $v \circ u$ est définie et dérivable sur I et $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]$.*

Démonstration. au programme dans le cas d'une fonction u constante ou localement strictement monotone. □

Exemple 1. *Dérivée des fonctions u^n, $\sqrt{u}$, $\dfrac{1}{u^n}$, $\sin u$, $\cos u$ ...*

1.3 Dérivée et variations d'une fonction

Théorème 5. *On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I alors :*
- *Si f est constante sur I alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.*
- *Si f est croissante sur I alors $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.*
- *Si f est décroissante sur I alors $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.*

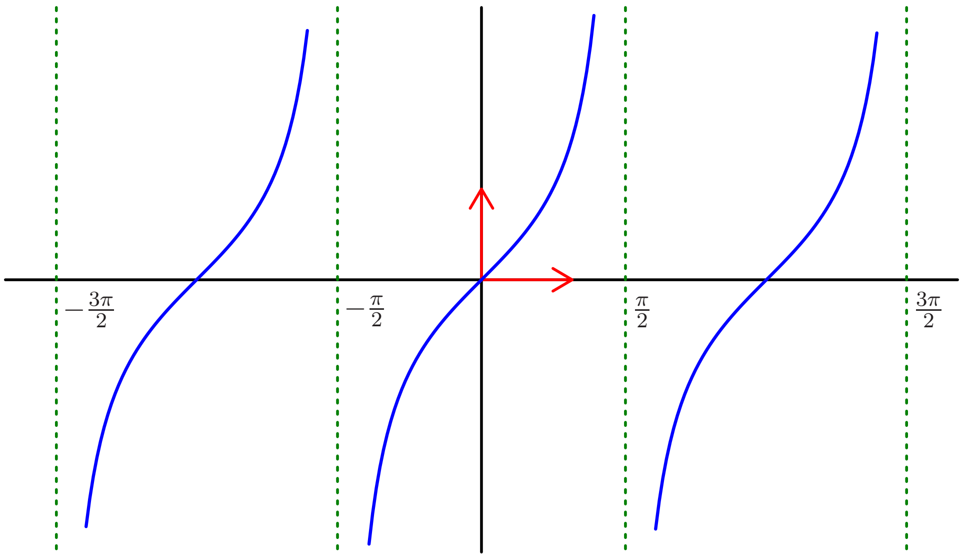
Démonstration. au programme. □

Théorème 6. *On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I alors :*
- *Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$ alors f est constante sur I.*
- *Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ alors f est strictement décroissante sur I.*

Démonstration. admise. □

1.4 Étude de la fonction tangente

Définition 4. *La fonction* tangente *est définie sur* $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *par* $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.



Propriété 2. *La fonction tangente est impaire et π-périodique.*

Propriété 3.

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan x = -\infty$$

Propriété 4. *La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition et* $(\tan)'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

Corollaire 1. *La fonction tangente est strictement croissante sur chacun des intervalles de son ensemble de définition.*

2 Primitive d'une fonction

2.1 Notion de primitive

Définition 5. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de la fonction f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.*

Exemple 2. *primitive d'une fonction polynôme.*

Théorème 7. *Toute fonction définie et continue sur un intervalle I admet des primitives.*

Démonstration. admise. □

Théorème 8. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Toute primitive de f sur I est de la forme $F + k$ où $k \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. au programme. □

Théorème 9. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I avec $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant la condition initiale $F(x_0) = y_0$.*

Démonstration. au programme. □

2.2 Primitives de référence

Théorème 10. *Primitives des fonctions usuelles.*

fonction f	*primitive F*	*intervalle de définition*
a	$ax + k$	$\mathbb{R}$
x	$\dfrac{x^2}{2} + k$	$\mathbb{R}$
x^2	$\dfrac{x^3}{3} + k$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n} = x^{-n} \quad , \quad n \in \mathbb{N}\ ,\ n > 1$	$-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k = \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + k$	$]-\infty; 0[$ *et* $]0; +\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$]0; +\infty[$
$\sin x$	$-\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + k$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$	$]-\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi[\quad , \quad n \in \mathbb{Z}$
$\tan^2 x$	$\tan x - x + k$	$]-\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi[\quad , \quad n \in \mathbb{Z}$

Théorème 11. *Primitives issues de la formule de dérivation des fonctions composées.*

fonction f	*primitive F*
$u' \times u^n \quad , \quad n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + k$
$\dfrac{u'}{u^n} = u' \times u^{-n} \quad , \quad n \in \mathbb{N}\ ,\ n > 1$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}} + k = \dfrac{u^{-n+1}}{-n+1} + k$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$
$u' \times \sin u$	$-\cos u + k$
$u' \times \cos u$	$\sin u + k$