

Devoir maison de Mathématiques n°2

Exercice 1

- On considère la fonction $g(x) = x \cos(x) - \sin(x)$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.
 - Construire le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.
 - Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0; 2\pi[$ tel que $g(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-4} près.
 - Construire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.
- On considère la fonction $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ sur l'intervalle $]0; 2\pi[$.
 - Démontrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; 2\pi[$ et calculer sa dérivée.
 - Construire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; 2\pi[$.
 - Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $]0; 2\pi[$. (on fera apparaître son minimum)

Exercice 2

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = 2x^2 - x + 7$$

$$f(x) = x^2(x^3 + 1)^3$$

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$f(x) = x\sqrt{x}$$

Exercice 3

- On considère l'équation différentielle $(E_1) : 12f(x) + (1 - 6x)f'(x) - 11 = 0$ avec la condition initiale $f(1) = 3$.
Déterminer une solution de l'équation (E_1) sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- On considère l'équation différentielle $(E_2) : f'(x) + 2x[f(x)]^2 = 0$ avec la condition initiale $f(0) = 1$ et on note f une solution.
 - On suppose que la fonction f ne s'annule pas, montrer que la fonction $\frac{1}{f}$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} et que $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = 2x$.
 - En déduire qu'il existe un réel k tel que $f(x) = \frac{1}{x^2 + k}$.
 - Prouver que $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.
 - Vérifier que la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ est bien solution de l'équation différentielle (E_2) .