Devoir maison de Mathématiques n°2

Exercice 1

1. On considère la fonction $g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.
   (a) Construire le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.
   (b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0; 2\pi]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-4} près.
   (c) Construire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.
2. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ sur l'intervalle $]0; 2\pi]$.
   (a) Démontrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; 2\pi]$ et calculer sa dérivée.
   (b) Construire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; 2\pi]$.
   (c) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $]0; 2\pi]$. (on fera apparaître son minimum)

Exercice 2

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = 2x^2 - x + 7 \qquad f(x) = x^2(x^3+1)^3 \qquad f(x) = \frac{x}{(x^2+3)^2} \qquad f(x) = x\sqrt{x}$$

Exercice 3

1. On considère l'équation différentielle $(E_1)\ :\ 12f(x) + (1-6x)f'(x) - 11 = 0$ avec la condition initiale $f(1) = 3$.
   Déterminer une solution de l'équation (E_1) sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.
2. On considère l'équation différentielle $(E_2)\ :\ f'(x) + 2x[f(x)]^2 = 0$ avec la condition initiale $f(0) = 1$ et on note f une solution.
   (a) On suppose que la fonction f ne s'annule pas, montrer que la fonction $\dfrac{1}{f}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x) = 2x$.
   (b) En déduire qu'il existe un réel k tel que $f(x) = \dfrac{1}{x^2+k}$.
   (c) Prouver que $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.
   (d) Vérifier que la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ est bien solution de l'équation différentielle (E_2).