Correction du devoir de Mathématiques n°2

Exercice 1

– La fonction $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} + 7x + k \quad , \quad k \in \mathbb{R}$.

– La fonction $f(x) = \cos(3x+5)$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{3}\sin(3x+5) + k \quad , \quad k \in \mathbb{R}$.

– La fonction $f(x) = 3x(2x^2+1)^7$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{3(2x^2+1)^8}{32} + k \quad , \quad k \in \mathbb{R}$.

– La fonction $f(x) = \dfrac{\cos x}{(2-\sin x)^2}$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{2-\sin x} + k \quad , \quad k \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

1. (a) La fonction g est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 60x^2 + 6x = 6x(10x+1)$, on en déduit les variations de la fonction g :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{10}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
			$10,01$				$+\infty$
$g'(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				10		

(b) Sur l'intervalle $[-\frac{1}{10}; +\infty[$, la fonction g est minorée par 10 donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution. Sur l'intervalle $]-\infty; -\frac{1}{10}]$, la fonction g est continue et strictement croissante avec $g(-\frac{1}{10}) > 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ donc d'après le *théorème des valeurs intermédiaires* l'équation $g(x) = 0$ admet une unique racine réelle α. On obtient à l'aide de la calculatrice l'encadrement : $-0,85 < \alpha < -0,84$.

(c) On déduit des variations de g son tableau de signes :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2. (a) La fonction f est définie pour $x^3 - 1 \neq 0$ soit $x^3 \neq 1$ soit $x \neq 1$ d'où $\mathcal{D}_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$. On a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(10+\frac{1}{x})}{x(x^2-\frac{1}{x})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{10+\frac{1}{x}}{x^2-\frac{1}{x}} = 0$$

l'axe des abscisses est donc une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$. De plus :

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{11}{x^3-1} = -\infty \qquad \text{car} \quad x < 1 \Rightarrow x^3 < 1 \Rightarrow x^3 - 1 < 0$$

et

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{11}{x^3-1} = +\infty \qquad \text{car} \quad x > 1 \Rightarrow x^3 > 1 \Rightarrow x^3 - 1 > 0$$

donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à gauche et à droite à $\mathcal{C}_f$.

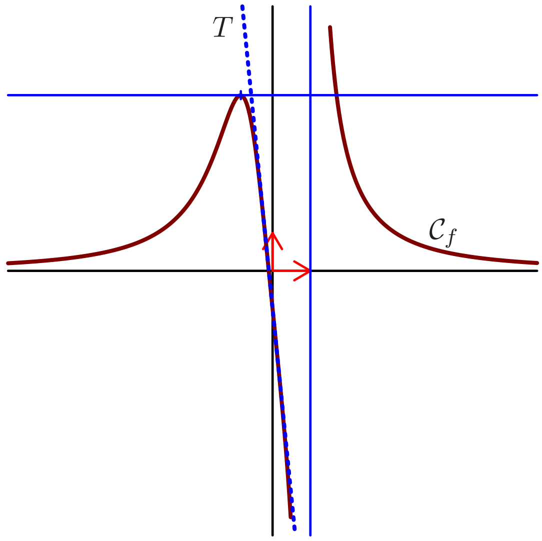
(b) La fonction f est rationnelle donc dérivable sur ses intervalles de définition $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$, et :

$$f'(x) = \frac{(10)\times(x^3-1) - (10x+1)\times(3x^2)}{(x^3-1)^2} = \frac{-20x^3 - 3x^2 - 10}{(x^3-1)^2} = \frac{-g(x)}{(x^3-1)^2}$$

(c) On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0

(d) la courbe représentative de la fonction f est la suivante :



(e) La tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)(x-0) = -1-10x$. On a :

$$\Delta(x) = f(x) - (-1-10x) = \frac{10x+1}{x^3-1} + (10x+1) = (10x+1)\left(\frac{1}{x^3-1}+1\right) = \frac{x^3(10x+1)}{x^3-1}$$

x		$-\frac{1}{10}$		0		1	
x^3	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$10x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^3-1	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\Delta(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$

La tangente T est au dessus de $\mathcal{C}_f$ sur les intervalles $[-\frac{1}{10};0]$ et $]1;+\infty[$.

Exercice 3

1. On a $[\sin x]^2 + [\sin'(x)]^2 = [\sin x]^2 + [\cos x]^2 = 1$ et $[\cos x]^2 + [\cos'(x)]^2 = [\cos x]^2 + [-\sin x]^2 = [\cos x]^2 + [\sin x]^2 = 1$.
2. (a) On considère une solution f de l'équation (E_1), on a $[f(x)]^2 = 1 - [f'(x)]^2$ donc $0 \leqslant [f(x)]^2 \leqslant 1$ donc $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

   (b) On pose $f(x) = \cos[g(x)]$, la fonction f est solution de (E_1) si et seulement si la fonction g vérifie l'équation différentielle :

$$\begin{array}{rrcl} & (\cos[g(x)])^2 + (-g'(x)\sin[g(x)])^2 & = & 1 \\ \Leftrightarrow & (\cos[g(x)])^2 + [g'(x)]^2(\sin[g(x)])^2 & = & 1 \\ \Leftrightarrow & 1-(\sin[g(x)])^2 + [g'(x)]^2(\sin[g(x)])^2 & = & 1 \\ \Leftrightarrow & ([g'(x)]^2-1)(\sin[g(x)])^2 & = & 0 \end{array}$$

   (c) On constate que les fonctions g vérifiant $g(x) = \pm x + k$ et $g(x) = 0[\pi]$ sont solutions de l'équation différentielle (E_2).

   (d) On en déduit que les fonction $f(x) = \cos(\pm x + k)$ et $f(x) = \pm 1$ sont solutions de l'équation (E_1).

   (e) Les fonctions *sinus* et *cosinus* appartiennent à la première famille de de solutions car $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(-x + \frac{\pi}{2})$ et $\cos x = \cos(x+0) = \cos(-x+0)$.