

Correction du devoir de Mathématiques n°2

Exercice 1

- La fonction $f(x) = 2x^3 - x + 5$ admet pour primitives sur \mathbb{R} , $F(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + 5x + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- La fonction $f(x) = \sin(5x + 3)$ admet pour primitives sur \mathbb{R} , $F(x) = -\frac{1}{5} \cos(5x + 3) + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- La fonction $f(x) = 2x(3x^2 + 1)^7$ admet pour primitives sur \mathbb{R} , $F(x) = \frac{(3x^2 + 1)^8}{24} + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- La fonction $f(x) = \frac{\sin x}{(2 + \cos x)^2}$ admet pour primitives sur \mathbb{R} , $F(x) = \frac{1}{2 + \cos x} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

1. (a) La fonction g est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = 60x^2 - 6x = 6x(10x - 1)$, on en déduit les variations de la fonction g :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{10}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	-10	$-10,01$	$+\infty$

- (b) Sur l'intervalle $]-\infty; \frac{1}{10}]$, la fonction g est majorée par -10 donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution. Sur l'intervalle $[\frac{1}{10}; +\infty[$, la fonction g est continue et strictement croissante avec $g(\frac{1}{10}) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ donc d'après le *théorème des valeurs intermédiaires* l'équation $g(x) = 0$ admet une unique racine réelle α . On obtient à l'aide de la calculatrice l'encadrement : $0,84 < \alpha < 0,85$.
- (c) On déduit des variations de g son tableau de signes :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

2. (a) La fonction f est définie pour $1 + x^3 \neq 0$ soit $x^3 \neq -1$ soit $x \neq -1$ d'où $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.
On a :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(\frac{1}{x} - 10)}{x(\frac{1}{x} + x^2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - 10}{\frac{1}{x} + x^2} = 0$$

l'axe des abscisses est donc une asymptote horizontale à \mathcal{C}_f en $+\infty$ et $-\infty$. De plus :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{11}{1 + x^3} = -\infty \quad \text{car } x < -1 \Rightarrow x^3 < -1 \Rightarrow 1 + x^3 < 0$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{11}{1 + x^3} = +\infty \quad \text{car } x > -1 \Rightarrow x^3 > -1 \Rightarrow 1 + x^3 > 0$$

donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à gauche et à droite à \mathcal{C}_f .

- (b) La fonction f est rationnelle donc dérivable sur ses intervalles de définition $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$,
et :

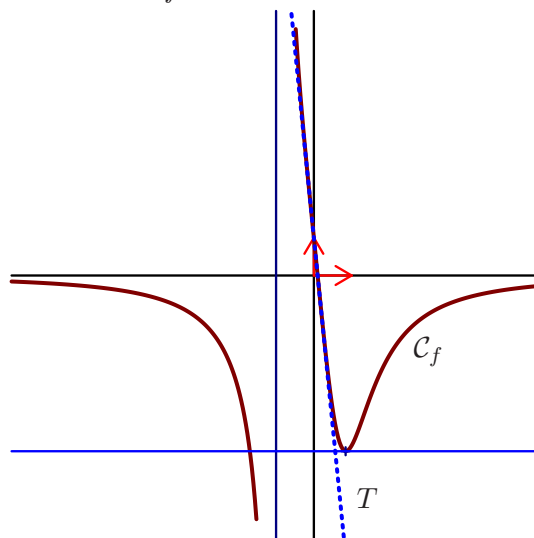
$$f'(x) = \frac{(-10) \times (1 + x^3) - (1 - 10x) \times (3x^2)}{(1 + x^3)^2} = \frac{20x^3 - 3x^2 - 10}{(1 + x^3)^2} = \frac{g(x)}{(1 + x^3)^2}$$

(c) On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$ $	$-$ 0 $+$	
$f(x)$	0	$-\infty$	$+\infty$	0

\swarrow \searrow \nearrow

(d) la courbe représentative de la fonction f est la suivante :



(e) La tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 - 10x$. On a :

$$\Delta(x) = f(x) - (1 - 10x) = \frac{1 - 10x}{1 + x^3} - (1 - 10x) = (1 - 10x) \left(\frac{1}{1 + x^3} - 1 \right) = (1 - 10x) \frac{-x^3}{1 + x^3} = \frac{x^3(10x - 1)}{x^3 + 1}$$

x	-1	0	$\frac{1}{10}$	
x^3	$-$	$-$ 0 $+$	$+$	$+$
$10x - 1$	$-$	$-$	$-$ 0 $+$	$+$
$x^3 + 1$	$-$ 0 $+$	$+$	$+$	$+$
$\Delta(x)$	$-$	$ $	$+$ 0 $-$ 0 $+$	

La tangente T est au dessus de C_f sur les intervalles $] -\infty; -1[$ et $[0; \frac{1}{10}]$.

Exercice 3

- On a $[\sin x]^2 + [\sin'(x)]^2 = [\sin x]^2 + [\cos x]^2 = 1$ et $[\cos x]^2 + [\cos'(x)]^2 = [\cos x]^2 + [-\sin x]^2 = [\cos x]^2 + [\sin x]^2 = 1$.
- (a) On considère une solution f de l'équation (E_1) , on a $[f(x)]^2 = 1 - [f'(x)]^2$ donc $0 \leq [f(x)]^2 \leq 1$ donc $-1 \leq f(x) \leq 1$.
- (b) On pose $f(x) = \sin[g(x)]$, la fonction f est solution de (E_1) si et seulement si la fonction g vérifie l'équation différentielle :

$$\begin{aligned}
 & (\sin[g(x)])^2 + (g'(x) \cos[g(x)])^2 = 1 \\
 \Leftrightarrow & (\sin[g(x)])^2 + [g'(x)]^2 (\cos[g(x)])^2 = 1 \\
 \Leftrightarrow & 1 - (\cos[g(x)])^2 + [g'(x)]^2 (\cos[g(x)])^2 = 1 \\
 \Leftrightarrow & ([g'(x)]^2 - 1) (\cos[g(x)])^2 = 0
 \end{aligned}$$

- On constate que les fonctions g vérifiant $g(x) = \pm x + k$ et $g(x) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ sont solutions de l'équation différentielle (E_2) .
- On en déduit que les fonction $f(x) = \sin(\pm x + k)$ et $f(x) = \pm 1$ sont solutions de l'équation (E_1) .
- Les fonctions *sinus* et *cosinus* appartiennent à la première famille de de solutions car $\sin x = \sin(x + 0) = \sin(-x + \pi)$ et $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(-x + \frac{\pi}{2})$.