Correction du devoir de Mathématiques n°2

Exercice 1

- La fonction $f(x) = 2x^3 - x + 5$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^2}{2} + 5x + k \quad , \quad k \in \mathbb{R}$.
- La fonction $f(x) = \sin(5x+3)$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$, $F(x) = -\dfrac{1}{5}\cos(5x+3) + k \quad , \quad k \in \mathbb{R}$.
- La fonction $f(x) = 2x(3x^2+1)^7$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{(3x^2+1)^8}{24} + k \quad , \quad k \in \mathbb{R}$.
- La fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{(2+\cos x)^2}$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{2+\cos x} + k \quad , \quad k \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

1. (a) La fonction g est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 60x^2 - 6x = 6x(10x-1)$, on en déduit les variations de la fonction g :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{10}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-10	$\searrow$	$-10,01$	$\nearrow$	$+\infty$

   (b) Sur l'intervalle $]-\infty; \frac{1}{10}]$, la fonction g est majorée par -10 donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution. Sur l'intervalle $[\frac{1}{10}; +\infty[$, la fonction g est continue et strictement croissante avec $g(\frac{1}{10}) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ donc d'après le *théorème des valeurs intermédiaires* l'équation $g(x) = 0$ admet une unique racine réelle α. On obtient à l'aide de la calculatrice l'encadrement : $0,84 < \alpha < 0,85$.

   (c) On déduit des variations de g son tableau de signes :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2. (a) La fonction f est définie pour $1+x^3 \neq 0$ soit $x^3 \neq -1$ soit $x \neq -1$ d'où $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$. On a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(\frac{1}{x} - 10)}{x(\frac{1}{x} + x^2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - 10}{\frac{1}{x} + x^2} = 0$$

   l'axe des abscisses est donc une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$. De plus :

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \frac{11}{1+x^3} = -\infty \qquad \text{car} \quad x < -1 \Rightarrow x^3 < -1 \Rightarrow 1 + x^3 < 0$$

   et

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \frac{11}{1+x^3} = +\infty \qquad \text{car} \quad x > -1 \Rightarrow x^3 > -1 \Rightarrow 1 + x^3 > 0$$

   donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à gauche et à droite à $\mathcal{C}_f$.

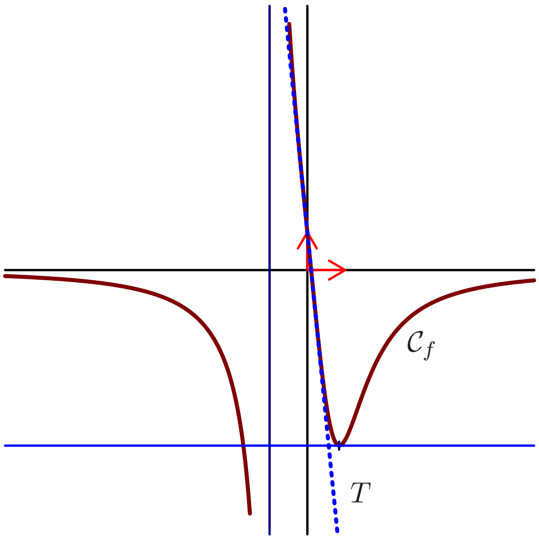
   (b) La fonction f est rationnelle donc dérivable sur ses intervalles de définition $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$, et :

$$f'(x) = \frac{(-10)\times(1+x^3) - (1-10x)\times(3x^2)}{(1+x^3)^2} = \frac{20x^3 - 3x^2 - 10}{(1+x^3)^2} = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$$

(c) On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1			α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

(d) la courbe représentative de la fonction f est la suivante :



(e) La tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 - 10x$. On a :

$$\Delta(x) = f(x) - (1-10x) = \frac{1-10x}{1+x^3} - (1-10x) = (1-10x)\left(\frac{1}{1+x^3} - 1\right) = (1-10x)\frac{-x^3}{1+x^3} = \frac{x^3(10x-1)}{x^3+1}$$

x		-1		0		$\frac{1}{10}$	
x^3	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$10x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^3+1	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\Delta(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$

La tangente T est au dessus de $\mathcal{C}_f$ sur les intervalles $]-\infty; -1[$ et $[0; \frac{1}{10}]$.

Exercice 3

1. On a $[\sin x]^2 + [\sin'(x)]^2 = [\sin x]^2 + [\cos x]^2 = 1$ et $[\cos x]^2 + [\cos'(x)]^2 = [\cos x]^2 + [-\sin x]^2 = [\cos x]^2 + [\sin x]^2 = 1$.
2. (a) On considère une solution f de l'équation (E_1), on a $[f(x)]^2 = 1 - [f'(x)]^2$ donc $0 \leqslant [f(x)]^2 \leqslant 1$ donc $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

   (b) On pose $f(x) = \sin[g(x)]$, la fonction f est solution de (E_1) si et seulement si la fonction g vérifie l'équation différentielle :

$$\begin{array}{rrcl} & (\sin[g(x)])^2 + (g'(x)\cos[g(x)])^2 & = & 1 \\ \Leftrightarrow & (\sin[g(x)])^2 + [g'(x)]^2(\cos[g(x)])^2 & = & 1 \\ \Leftrightarrow & 1 - (\cos[g(x)])^2 + [g'(x)]^2(\cos[g(x)])^2 & = & 1 \\ \Leftrightarrow & ([g'(x)]^2 - 1)(\cos[g(x)])^2 & = & 0 \end{array}$$

   (c) On constate que les fonctions g vérifiant $g(x) = \pm x + k$ et $g(x) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ sont solutions de l'équation différentielle (E_2).

   (d) On en déduit que les fonction $f(x) = \sin(\pm x + k)$ et $f(x) = \pm 1$ sont solutions de l'équation (E_1).

   (e) Les fonctions *sinus* et *cosinus* appartiennent à la première famille de de solutions car $\sin x = \sin(x+0) = \sin(-x+\pi)$ et $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(-x + \frac{\pi}{2})$.