Nombres complexes (première partie)

1 Définition des nombres complexes

Théorème 1. *Il existe un ensemble* $\mathbb{C}$ *des* nombres complexes *qui possède les propriétés suivantes :*
- $\mathbb{C}$ *contient* $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}$ *est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans* $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}$ *contient un nombre noté* i *tel que* $i^2 = -1$.
- *tout nombre complexe* z *admet une unique écriture sous la forme* $z = a+ib$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$, *cette écriture est appelée* forme algébrique *du nombre* z, *le réel* a *est la* partie réelle *du nombre* z *notée* $\mathcal{R}e(z)$ *et réel* b *est la* partie imaginaire *du nombre* z *notée* $\mathcal{I}m(z)$. *Si* $b = 0$ *le nombre* z *est dit* réel *et si* $a = 0$ *le nombre* z *est dit* imaginaire pur.

Démonstration. admis. □

Exemple 1. *Calcul de la forme algébrique de* $(1 + 7i) + (1 + 3i)(1 - 5i)$.

Propriété 1. *Tout nombre complexe* $z = a + ib$ *admet un unique opposé* z' *tel que* $z + z' = 0$, *on le note* $z' = -z$ *et on a* $-z = (-a) + i(-b)$.

Démonstration. au programme. □

Définition 1. *On définit la* différence *de deux nombres complexes* z *et* z' *par* $z - z' = z + (-z')$.

Propriété 2. *Tout nombre complexe* $z = a + ib$ *non nul admet un unique inverse* z' *tel que* $z \times z' = 1$, *on le note* $z' = \dfrac{1}{z}$ *et on a* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + i\dfrac{-b}{a^2 + b^2}$.

Démonstration. au programme. □

Exemple 2. *Calcul de la forme algébrique de* $\dfrac{1}{2 + 3i}$.

Définition 2. *On définit le* quotient *de deux nombres complexes* z *et* z' *par* $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$.

Exemple 3. *Calcul de la forme algébrique de* $\dfrac{1 + 2i}{1 + 3i}$.

2 Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré à coefficients réels

Théorème 2. *L'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *avec* a, b, c *trois réels et* $a \neq 0$ *admet :*
- *Si* $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, *deux solutions réelles distinctes* $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ *et on a* $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- *Si* $\Delta = 0$, *une solution réelle double* $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ *et on a* $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.
- *Si* $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, *deux solutions complexes conjuguées* $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ *et* $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ *et on a* $ax^2 + bx + c = a(x - z_1)(x - z_2)$.

Démonstration. au programme. □

3 Conjugué et Module d'un nombre complexe

Définition 3. *Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, on appelle* nombre complexe conjugué *de z le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.*

Propriété 3. *Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a :*

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{-z} = -\overline{z}$
3. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
4. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
5. *pour* $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
6. *pour* $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
7. $\overline{\overline{z}} = z$
8. *z est réel si et seulement si* $\overline{z} = z$.
9. *z est imaginaire pur si et seulement si* $\overline{z} = -z$.

Démonstration. au programme. □

Définition 4. *Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, on appelle* module *de z le réel $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*

Propriété 4. *Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a :*

1. $z\overline{z} = |z|^2$
2. $|\overline{z}| = |z|$
3. $|-z| = |z|$
4. $|z| = 0$ *si et seulement si* $z = 0$
5. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
6. *pour* $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
7. *pour* $z_2 \neq 0$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
8. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Démonstration. au programme. □