Devoir de Mathématiques n°3

Exercice 1

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2 - (3i)^3 \qquad z_2 = 2 + \frac{3}{i} \qquad z_3 = (3-i)(2i+1) \qquad z_4 = \frac{1}{3-i} \qquad z_5 = \frac{3-i}{2i+1}$$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x-1}{x-i} & = & 2 \quad (E_1) \\ x^2 - 6x + 13 & = & 0 \quad (E_2) \\ \dfrac{3}{x} - x & = & 1 \quad (E_3) \end{array}$$

Exercice 3

On pose $\alpha = 2 + i$ et $\beta = 3 - 2i$, calculer $\overline{\alpha} - \overline{\beta}$, $\overline{\alpha + \beta}$, $|\alpha| - |\beta|$, $|\alpha + \beta|$ et $|\alpha^8|$.

Exercice 4

On considère l'équation :

$$(E) \ : \ z^3 - (6+i)z^2 + (13+6i)z - 13i = 0$$

1. Démontrer que le nombre i est solution de cette équation.
2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z, on ait :

$$z^3 - (6+i)z^2 + (13+6i)z - 13i = (z-i)(az^2 + bz + c)$$

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 5 *(Bonus)*

Démontrer que dans l'ensemble des nombres complexes, le module du produit est égal au produit des modules.